ÜBER
DIE TRANSVERSALEN SCHWINGUNGEN BELASTETER STÄBE.

VON

FERDINAND LIPPICH,

ASSISTENT AN DER UNIVERSITÄTS-LEHRKANZEL DER PHYSIK ZU PRAG.

(Mit 2 Tafeln.)

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 31. OCTOBER 1861.

I. Theoretische Herleitung der nothwendigen Relationen.

Ein elastischer Stab wird im Allgemeinen seine Schwingungsdauer verändern, wenn in irgend einem Punkte desselben eine träge Masse befestiget wird. Dabei sollen die, die Bewegung unterhaltenden Elasticitätskräfte nicht geändert, das Gewicht der angehängten Masse nicht berücksichtiget werden, so dass also nur eine grössere Masse durch dieselben Kräfte in Bewegung erhalten ist. Dann kann aber diese Änderung der Schwingungsdauer nur in einer Vergrösserung derselben bestehen, die gleichen Stellenzeiger der Tonhöhen [1]) in dem belasteten und unbelasteten Stab vorausgesetzt.

Der Einfluss der angehängten Masse wird aber nicht nur von ihrer Grösse, sondern auch von ihrer Vertheilung und der Lage ihres Befestigungspunktes abhängen, und es soll die Aufgabe der folgenden Untersuchung sein, die bei dem Problem schwingender Stäbe in Frage gestellten Grössen auch in ihrer Abhängigkeit von den eben genannten Umständen darzustellen.

Es seien x, y, die Coordinaten irgend eines Punktes der Mittellinie des Stabes zur Zeit t, und die Bewegung der einzelnen Punkte erfolge in der Ebene (XY). Die Länge des Stabes sei mit l bezeichnet und m das Massenelement um den Punkt (x, y); φ die Fläche des Querschnittes, δ die Dichte, ρ das erforderliche Gewicht um die Länge eines solchen Stabes zu verdoppeln, endlich τ das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die durch seinen Schwerpunkt gehende, auf der Ebene (XY) senkrechte Gerade, beziehen sich gleichfalls auf den Punkt (x, y). Für den in seiner Ruhelage als geradlinig, oder doch nur sehr wenig

[1]) Bezeichnet man mit T_1, T_2, T_3 . . . die auf einander folgenden Tonhöhen, die ein Stab überhaupt geben kann, so sind 1, 2, 3, die Stellenzeiger derselben.

gekrümmten Stab, mit der Axe der x zusammenfallend gedacht, gelangt man durch Anwendung des d'Alembert'schen Princips bekanntlich zu der Bewegungsgleichung:

$$1)\qquad \frac{q}{\varphi}\tau \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -\Sigma_x^l m' \frac{d^2y'}{dt^2}(x'-x)$$

wenn x', y', m' sich auf Punkte beziehen, für welche $x' > x$, und keine äussern Kräfte auf den Stab wirken. In dieser Summe hat man aber bei vorliegendem Falle zwei Partien zu unterscheiden, die von einander getrennt werden müssen: 1. den eigentlichen Stab, dessen Querschnitt und Dichte constant verausgesetzt wird; 2. die an den Stab befestigte Masse $\mathfrak{M}$ mit den Coordinaten a, b, ihres Befestigungspunktes, und den Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ irgend eines Massenelementes $\mathfrak{m}$. Dieser Theil wird in seinen einzelnen Punkten im Gegensatze zu dem früheren von keinen Elasticitätskräften angegriffen.

Indem man Kürze halber setzt:

$$2)\qquad \frac{q\tau}{\delta\varphi \cdot \varphi} = g \cdot \frac{lq}{\varphi p'} \cdot \tau = \gamma^2$$

wo g die Acceleration der Schwere, und p' das Gewicht des Stabes bedeutet, wird aus Gleichung 1) in der Summe die beiden Theile berücksichtigend:

$$\gamma^2 \frac{d^2y}{dx^2} = -\int_x^l \frac{d^2y'}{dt^2}(x'-x)\,dx' - \frac{1}{\delta\varphi}\Sigma\mathfrak{m} \cdot \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}(\mathfrak{x}-x).$$

Diese Bewegungsgleichung wurde aber, wie oben bemerkt, aus der Gleichgewichtsbedingung erhalten, für welche es nothwendig, aber auch hinreichend ist, wenn das Moment der Kräfte, die die beiden unendlich nahen Querschnitte des Stabes bei (xy) parallel zu stellen suchen, gleich ist der Summe der Momente der den Stab in den einzelnen Punkten angreifenden Kräfte, für welche $x' > x$, und der ganze Theil von $x = 0$ bis $x = x$, als fest und unbeweglich angesehen wird.

Erinnert man sich dessen, so sieht man sofort, dass für alle jene Punkte, für welche man $x > a$ hat, die zweite Summe verschwinden muss, und daher, indem man zur besseren Unterscheidung, die auf solche Punkte bezüglichen Grössen μ, ξ, η nennt, für die obige Gleichung folgende zwei zu schreiben sind:

$$3)\ x \leqq a,\quad \gamma^2 \frac{d^2y}{dx^2} = -\int_x^a \frac{d^2y'}{dt^2}(x'-x)\,dx' - \int_a^l \frac{d^2\eta'}{dt^2}(\xi'-x)\,d\xi' - \frac{1}{\delta\varphi}\Sigma\mathfrak{m} \cdot \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}(\mathfrak{x}-x)$$

$$4)\ x \geqq a,\quad \gamma^2 \frac{d^2y}{d\xi^2} = -\int_\xi^l \frac{d^2\eta'}{dt^2}(\xi'-\xi)\,d\xi'.$$

Differentiirt man diese Gleichungen nach x und ξ, so sieht man, dass die von der Veränderlichkeit der untern Grenze herrührenden Glieder verschwinden, indem man darin $x' = x$ und $\xi' = \xi$ zu setzen hat. Es wird somit

$$\gamma^2 \frac{d^3y}{dx^3} = \int_x^a \frac{d^2y'}{dt^2}x'\,dx' + \int_a^l \frac{d^2\eta'}{dt^2}\xi'\,d\xi' + \frac{1}{\delta\varphi}\Sigma\mathfrak{m} \cdot \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\mathfrak{x}$$

$$\gamma^2 \frac{d^3\eta}{d\xi^3} = \int_\xi^l \frac{d^2\eta'}{dt^2}\xi'\,d\xi'$$

und wenn man ein zweites Mal nach x differentiirt, wird, da nur die von der Veränderlichkeit der untern Grenze herrührenden Glieder übrig bleiben

$$5) \qquad \gamma^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \gamma^2 \frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = -\frac{d^2 \eta}{dt^2}.$$

Beide Theile des Stabes ergeben somit dieselben Differentialgleichungen, von deren Integration die Lösung des Problems abhängt, die sich ausserdem in Nichts von denjenigen unterscheiden, die man bei Betrachtung von unbelasteten Stäben erhalten haben würde. Ihre Integration geschieht demnach auf die bereits bekannte Weise, und die Constanten folgen aus den Bedingungen, wie sie für gewisse Punkte gegeben sind. Eben diese Bedingungen sind verschieden für die beiden Theile des Stabes, in Folge dessen sich die Integrale von 3) und 4) in den Constanten von einander unterscheiden werden.

Übergehend zur Bestimmung dieser Constanten, seien zunächst die aus 5) gezogenen Ausdrücke für y und η

$$y = g \sin \gamma s^2 t + h \,.\, \cos \gamma s^2 t,$$

$$6) \qquad \begin{aligned} g &= A \sin sx + A' \cos sx + \frac{1}{2} B\,(e^{sx} - e^{-sx}) + \frac{1}{2} B'\,(e^{sx} + e^{-sx}), \\ h &= C \sin sx + C' \cos sx + \frac{1}{2} D\,(e^{sx} - e^{-sx}) + \frac{1}{2} D'\,(e^{sx} + e^{-sx}), \end{aligned}$$

$$\eta = g' \sin \gamma\sigma^2 t + h' \,.\, \cos \gamma\sigma^2 t,$$

$$7) \qquad \begin{aligned} g' &= L \sin \sigma\xi + L' \cos \sigma\xi + \frac{1}{2} M\,(e^{\sigma\xi} - e^{-\sigma\xi}) + \frac{1}{2} M'\,(e^{\sigma\xi} + e^{-\sigma\xi}), \\ h' &= P \sin \sigma\xi + P' \cos \sigma\xi + \frac{1}{2} Q\,(e^{\sigma\xi} - e^{-\sigma\xi}) + \frac{1}{2} Q'\,(e^{\sigma\xi} + e^{-\sigma\xi}), \end{aligned}$$

ferner werde vorausgesetzt, um für den am häufigsten vorkommenden Fall die Auflösung zu geben, der Stab sei an dem einen Endpunkt, für welchen $x = 0$, $y = 0$ genommen wird, eingeklemmt, so dass man sogleich für diesen Punkt die für jeden Zeitaugenblick zu erfüllende Bedingung hat:

$$8) \qquad x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

Setzt man in Gleichung 3) und in ihrer nach x genommenen Ableitung $x = a$, so hat man weiter die für jedes t geltenden Relationen:

$$9) \quad x = a,\ \gamma^2 . \frac{d^3 y}{dx^2} = -\int_a^l \frac{d^2 \eta'}{dt^2} (\xi' - a)\, d\xi' - \frac{1}{\delta\varphi} \Sigma \mathfrak{m} . \frac{d^2 \mathfrak{y}}{dt^2} (\mathfrak{x} - a);\ \gamma^2 \frac{d^3 y}{dx^3} = \int_a^l \frac{d^2 \eta'}{dt^2} d\xi' + \frac{1}{\delta\varphi} \Sigma \mathfrak{m} \frac{d^2 \mathfrak{y}}{dt^2}.$$

Geht man jetzt auf den zweiten Theil des Stabes über, der ganz getrennt von dem ersten betrachtet wurde, so hat man für $x = \xi = a$ solche Bedingungen zu setzen, die die in der Wirklichkeit nicht aufhörende Continuität im Punkte (a, b) ausdrücken, diese sind aber

$$10) \qquad x = \xi = a, \quad y = \eta, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}.$$

Endlich wird man für das Ende des Stabes, da dieses keine äussern Kräfte angreifen sollen, noch setzen müssen:

$$\text{11)} \qquad \xi = l, \quad \gamma^2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 0 \quad \gamma^2 \frac{d^3\eta}{d\xi^3} = 0.$$

Die Grössen s und σ, von denen die Schwingungsdauer abhängig ist, wurden bis jetzt als von einander verschieden angenommen. Man sieht aber leicht ein, dass eine solche Annahme mit den Bedingungen 10) im Widerspruche steht, sobald man die Schwingungsweise der obern Theile des Stabes ganz allgemein und ohne weitere Bedingung annehmen würde.

In der That ist es unmöglich, dass zwei Punkte, die ihre Schwingung in verschiedenen Zeiten vollenden, für jedes t sich zugleich an demselben Orte befinden, und wenn man die Gleichungen 10) zweimal nach t differentiirt, so erhält man z. B. aus einer derselben

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_a = \left(\frac{d^2\eta}{dt}\right)_a$$

aber es ist

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\gamma^2 s^4 y \quad ; \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\gamma^2\sigma^4\eta$$

woraus wegen $y = \eta$ sogleich folgt

$$s = \sigma,$$

und man hat obige Behauptung auch aus den Bedingungsgleichungen erwiesen.

Allein dieses zeigt nur, dass die Punkte von $x = a$ bis $x = l$ Schwingungen vollführen, die gleiche Dauer mit denen der Punkte von $x = 0$ bis $x = a$ haben, stellt aber die Möglichkeit nicht in Abrede, dass ausserdem noch eine andere Schwingung gleichzeitig und blos in dem oberen Theil des Stabes stattfinde. Denn macht man die Annahme, es habe η die Form

$$\eta = g' \sin \gamma s^2 t + h' \cos \gamma s^2 t + g'' \,.\, \sin \gamma\sigma^2 t + h'' \cos \gamma\sigma^2 t$$

was immer erlaubt ist, da der Differentialgleichung eine Summe ähnlicher Ausdrücke wie 7) genügt, und es sei für $\xi = a$, $g'' = 0$ und $h'' = 0$, dessgleichen: $\frac{dg''}{d\xi} = 0$ und $\frac{dh''}{d\xi} = 0$, so wird man vollständig den Bedingungen 10) genügen, obwohl für $\xi > a$ die obigen Ausdrücke endliche Werthe annehmen.

Es ist zwar im Vorhinein klar, dass in einem Theil des Stabes nicht eine Schwingungsweise existiren kann, ohne sich sogleich über seine ganze Länge zu verbreiten, jedoch der Vollständigkeit wegen mag auch dieses aus den aufgestellten Bedingungen erwiesen werden.

Zu diesem Zwecke wird man die erste der Gleichungen 9) wählen. Bedenkt man, dass die Punkte der Masse $\mathfrak{M}$ übereinstimmend mit denen der untern Theile des Stabes schwingen, so lässt sich diese Gleichung unter obiger Annahme von η auf die Form bringen

$$\left\{\gamma^2\left(\frac{d^2g}{dx^2}\right)_a - \gamma^2 s^4 \int_a^l g'(\xi'-a)\,d\xi' - \gamma^2 s^4 R\right\} \sin\gamma s^2 t - \left\{\gamma^2\left(\frac{d^2h}{dx^2}\right) - \gamma^2 s^4 \int_a^l h'(\xi'-a)\,d\xi' - \gamma^2 s^4 S\right\} \cos\gamma s^2 t =$$

$$= \gamma^2\sigma^4 \int_a^l g''(\xi'-a)\,d\xi' \,.\, \sin\gamma\sigma^2 t + \gamma^2\sigma^4 \int_a^l h''(\xi'-a)\,d\xi' \,.\, \cos\gamma\sigma^2 t$$

wo die Bedeutung von R und S, die von der Zeit unabhängig, leicht erkannt wird. Differentiirt man diese Gleichung zweimal nach t und dividirt das Resultat durch dieselbe, so erhält man wieder

$$s = \sigma$$

so lange die im rechten Theil stehenden bestimmten Integrale nicht verschwinden, denn dann wäre aus obiger Gleichung das σ nicht bestimmbar. Allein die Integrale

$$\int_a^l g''(\xi - a)\, d\xi' \quad ; \quad \int_a^l h''(\xi' - a)\, d\xi'$$

können nie der Nulle gleich werden, denn sie würden ausdrücken, dass die Schwerpunkte der Flächen, die von den Curven $\eta' = g''$ und $\eta' = h''$ eingeschlossen, und von $(\xi' - a) = (l - a)$ bis $(\xi' - a) = 0$ genommen sind, die Abscissen a haben, also in die eine sie begrenzende Ordinate fallen, was unmöglich ist.

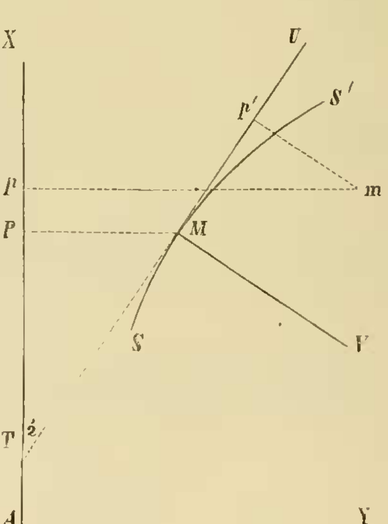
Man hat daher nach Allen diesem immer zu setzen

$$s = \sigma \tag{12}$$

und es genügt für y und η gleichzeitig dieselbe Form, am einfachsten nur ein Glied, wie in 6) und 7) anzunehmen.

Bevor man jedoch zur Substitution der aus 6), 7) und 12) genommenen Werthe von y, η und deren Ableitungen übergehen kann, nämlich in Gleichung 8) bis 11), müssen noch die auf die Masse $\mathfrak{M}$ bezüglichen Summen in eine zur weitern Behandlung geeignetere Form gebracht werden. Um dieses zu leisten, werde für die Masse $\mathfrak{M}$ ein neues Coordinatensystem eingeführt, dessen Axen immer dieselbe relative Lage gegen die Punkte derselben einnehmen. Die Masse $\mathfrak{M}$ wird aber als blos in dem Punkte (a, b) mit der Mittellinie des Stabes, oder vielmehr mit dem durch (a, b) gehenden Querschnitte desselben, als fest verbunden angenommen, und dieses ist demnach eine, ihre Lage in Bezug auf $\mathfrak{M}$ nicht ändernde Ebene.

Die Durchschnittslinie dieser Ebene mit (X, Y) oder der Schwingungsebene des Stabes sei die Axe der v, die auf v senkrechte, in der Ebene (XY) gelegene Gerade, oder die Tangente an die Curve der sich bewegenden Mittellinie im Punkte (a, b) sei die Axe der u, die Axe der w demnach senkrecht auf (u, v) oder Eb. (XY) im Punkte (a, b) gezogen.



In beistehender Figur ist XAY die Schwingungsebene, SS' ein Theil der Mittellinie zur Zeit t, M der Durchschnittspunkt von SS mit dem fest mit der Masse $\mathfrak{M}$ verbundenen Querschnitt, dessen Trace auf der Ebene (XY) MV ist; $\mathfrak{m}$ die Projection eines Massenelementes von $\mathfrak{M}$ auf Eb. (XY) oder (UV), also:

$$Ap = \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{m}p = \mathfrak{y}$$
$$Mp' = u, \quad \mathfrak{m}p' = v$$
$$AP = a, \quad MP = b$$

und wenn man unter $\frac{db}{da}$ dasjenige versteht, was aus $\frac{dy}{dx}$ wird, wenn man darin $x = a$ setzt, so ist noch

$$\operatorname{tng} i = \frac{db}{da}$$

woraus dann sofort erfolgt

$$\mathfrak{x} = a + u \cos i - v \sin i, \qquad \mathfrak{y} = b + u \sin i + v \cos i$$

oder, das Bogenelement in (a, b) mit dl bezeichnend

$$\mathfrak{x} = a + u \frac{da}{dl} - v \frac{db}{dl} \; ; \quad \mathfrak{y} = b + u \frac{db}{dl} + v \frac{da}{dl} .$$

Da aber schon oben ds mit dx verwechselt wurde, wird man mit demselben Rechte auch hier $da = dl$ setzen, und daher

$$\mathfrak{x} = a + u - v \frac{db}{da} \qquad \mathfrak{y} = b + u \frac{db}{da} + v$$

woraus weiter folgt, weil u und v von t unabhängig sind

$$13) \qquad \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} = \frac{d^2b}{dt^2} + u \frac{d^2}{dt^2} \cdot \frac{db}{da}$$

dieses mit

$$(\mathfrak{x}-a) = u - v \cdot \frac{db}{da}$$

multiplicirt gibt

$$14) \qquad (\mathfrak{x}-a) \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} = u \frac{d^2b}{dt^2} + u^2 \frac{d^2}{dt^2} \cdot \frac{db}{da} - v \frac{db}{da} \cdot \frac{d^2b}{dt^2} - uv \frac{db}{da} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \frac{db}{da}.$$

Diese Werthe aus 13) und 14) zugleich mit $\mathfrak{m} = dm$ in die entsprechenden Ausdrücke 9) gesetzt, ergeben für die dortigen Summen:

$$\Sigma\mathfrak{m} \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} (\mathfrak{x}-a) = \frac{d^2b}{dt^2} \int u\, dm + \frac{d^2}{dt^2} \cdot \frac{db}{da} \int u^2 dm - \frac{db}{da} \cdot \frac{d^2b}{dt^2} \cdot \int v \cdot dm - \frac{db}{da} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \cdot \frac{db}{da} \int uv \cdot dm$$

$$\Sigma\mathfrak{m} \cdot \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} = \frac{d^2b}{dt^2} \int dm + \frac{d^2}{dt^2} \cdot \frac{db}{da} \int u\, dm.$$

Diese Integrale haben sehr bekannte Werthe, und bedenkt man weiter, dass b und $\frac{db}{da}$ sehr kleine Grössen sind, so dass $b \frac{db}{da}$ und $\left(\frac{db}{da}\right)^2$ mit $\int dm \cdot v$ und $\int dm \cdot uv$ multiplicirt gegen die übrigen Glieder vernachlässigt werden können, und zwar um so mehr, je symmetrischer der Körper in Bezug auf die Mittellinie und die Ebene (XY) gestaltet ist, so kann man, mit $\mathfrak{U}$ die Coordinate des Schwerpunktes und durch $\mathfrak{T}$ das Trägheitsmoment der Masse $\mathfrak{M}$ in Bezug auf eine durch M gehende, und auf der Ebene der (uv) senkrechten Geraden bezeichnend, setzen

$$15) \qquad \Sigma\mathfrak{m} \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} (\mathfrak{x}-a) = \mathfrak{M}\mathfrak{U} \frac{d^2b}{dt^2} - \mathfrak{T} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \cdot \frac{db}{da}$$

$$16) \qquad \Sigma\mathfrak{m} \cdot \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} = \mathfrak{M} \frac{d^2b}{dt^2} + \mathfrak{M}\mathfrak{U} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \cdot \frac{db}{da}.$$

Nun kann man auch an die weitere Entwickelung der oben aufgestellten Bedingungsgleichungen schreiten. Man hat zunächst wegen Gleichung 12)

$$y = g \sin \gamma s^2 t + h \,.\, \cos \gamma s^2 t, \quad \eta = g' \sin \gamma s^2 t + h' \cos \gamma s^2 t$$

$$17) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\gamma^2 s^4 (g \sin \gamma s^2 t + h \cos \gamma s^2 t), \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -\gamma^2 s^4 (g' \sin \gamma s^2 t + h' \cos \gamma s^2 t).$$

Ferner weil s eine, auch von x und ξ unabhängige Grösse bedeutet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dg}{dx} \sin \gamma s^2 t + \frac{dh}{dx} \cos \gamma s^2 t \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dg'}{d\xi} \sin \gamma s^2 t + \frac{dh'}{d\xi} \,.\, \cos \gamma s^2 t$$

$$18) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dg^2}{d^2\eta} \sin \gamma s^2 t + \;\ldots\ldots \qquad \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{d^2 g'}{d\xi^2} \sin \gamma s^2 t + \;\ldots$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \;\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} = \;\ldots\ldots$$

$$19) \quad \frac{d^2}{dt^2} \,.\, \frac{d'y}{dx} = -\gamma^2 s^4 \left(\frac{dg}{dx} \sin \gamma s^x t + \frac{dh}{dx} \cos \gamma s^2 t \right).$$

Denkt man sich die Substitutionen von 17), 18), 19) in die Gleichungen 8), 9), 10) und 11) ausgeführt, so bemerkt man, dass, da $\sin \gamma s^2 t$ und $\cos \gamma s^2 t$ vor das Integralzeichen kommen, nur solche, mit diesen Grössen multiplicirte Glieder vorkommen. Allein die Bedingungsgleichungen enthalten nur die zweiten Ableitungen von t, in welchen wieder nur die g und g' und deren Ableitungen nach x mit $\sin \gamma s^2 t$, die h und h' und deren Ableitungen nach x aber mit $\cos \gamma st$ multiplieirt erscheinen.

Sollen aber diese Bedingungen für jeden Zeitaugenblick erfüllt sein, so müssen sowohl die Summen der mit $\sin \gamma s^2 t$, als auch die Summen der mit $\cos \gamma s^2 t$ multiplicirten Glieder, jede für sich der Nulle gleich sein. Nach allen diesem zerfällt also jede Bedingungsgleichung in zwei neue, die einfach dadurch erhalten werden, dass man einmal

$$g, \; -\gamma^2 s^4 g, \; \frac{dg}{dx}, \; \frac{d^2 g}{dx^2}, \; \frac{d^3 y}{dx^3}, \; -\gamma^2 s^4 \frac{dg}{dx}, \qquad g', \; -\gamma^2 s^4 g', \; \frac{dg'}{d\xi}, \; \frac{d^2 g'}{d\xi^2}, \; \frac{d^3 g'}{d\xi^3}$$

das andere Mal aber

$$h, \; -\gamma^2 s^4 h, \; \frac{dh}{dx}, \; \frac{d^2 h}{dx^2}, \; \frac{d^3 h}{dx^3}, \; -\gamma^2 s^4 \frac{dh}{dx}, \qquad h', \; -\gamma^2 s^4 h', \; \frac{dh'}{d\xi}, \; \frac{d^2 h'}{d\xi^2}, \; \frac{d^3 h'}{d\xi^3}$$

an die Stelle von

$$y, \quad \frac{d^2 y}{dt^2}, \; \frac{dy}{dx}, \; \frac{d^2 y}{dx^2}, \; \frac{d^3 y}{dx^3}, \quad \frac{d^2}{dt^2} \,.\, \frac{dy}{dx}, \qquad \eta, \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2}, \; \frac{d\eta}{d\xi}, \; \frac{d^2 \eta}{d\xi^2}, \; \frac{d^3 \eta}{d\xi^3}$$

setzt, so dass man folgende Gleichungen erhält:

$$20) \quad x = 0; \qquad g = 0; \quad h = 0$$

$$\frac{dg}{dx} = 0 \quad : \quad \frac{dh}{dx} = 0$$

$$21) \quad x = a; \quad \frac{d^2 g}{dx^2} = s^4 \int_a^l g' \,(\xi - a)\, d\xi + \frac{s^4}{\delta\varphi} \left(\mathfrak{M}\mathfrak{u} g + \mathfrak{T} \,.\, \frac{dg}{dx} \right)$$

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = s^4 \int_a^l h' \,(\xi - a)\, d\xi + \frac{s^4}{\delta\varphi} \left(\mathfrak{M}\mathfrak{u} h + \mathfrak{T} \,.\, \frac{dh}{dx} \right)$$

$$21)\qquad \begin{aligned} \frac{d^3h}{dx^3} &= -s^4\int_a^l g' d\xi' - \frac{s^4}{\partial\varphi}\left(\mathfrak{M}g + \mathfrak{M}\mathfrak{U}\frac{dg}{dx}\right) \\ \frac{d^3h}{dx^3} &= -s^4\int_a^l h' d\xi' - \frac{s^4}{\partial\varphi}\left(\mathfrak{M}h + \mathfrak{M}\mathfrak{U}\frac{dh}{dx}\right) \end{aligned}$$

$$x = \xi = a \qquad g = g' \qquad h = h'$$

$$22)\qquad \frac{dg}{dx} = \frac{dg'}{d\xi} \qquad \frac{dh}{dx} = \frac{dh'}{d\xi}$$

$$\xi = l \qquad \frac{d^2g'}{d\xi^2} = 0 \qquad \frac{d^2h'}{d\xi^2} = 0$$

$$23)\qquad \frac{d^3g'}{d\xi^3} = 0 \qquad \frac{d^3h'}{d\xi^3} = 0$$

Es wird genügen, blos einen Theil dieser Gleichungen zu betrachten, z. B. denjenigen, welcher g und g' enthält. In den daraus erhaltenen Formeln wird man nur an die Stelle von $A, A' \ldots LL' \ldots$ zu setzen haben: $C, C' \ldots P, P' \ldots$ um sofort den auf h, h' bezüglichen Relationen zu genügen. Im Folgenden sei es noch erlaubt der kürzeren und übersichtlicheren Schreibweise wegen, die hyperbolischen Functionen einzuführen, also zu setzen:

$$\mathfrak{Sin}\,.\,sx = \frac{1}{2}\left(e^{sx} - e^{-sx}\right), \qquad \mathfrak{Cos}\,.\,sx = \frac{1}{2}\left(e^{sx} + e^{-sx}\right).$$

Aus den Gleichungen 20) folgt sogleich

$$24)\qquad A' = -B' \qquad A = -B$$

so dass man schreiben kann

$$g = A\,(\sin sx - \mathfrak{Sin}.\,sx) + A'\,(\cos sx - \mathfrak{Cos}.\,sx)$$

woraus man die nöthigen Ableitungen findet

$$25)\qquad \begin{aligned} \frac{dg}{dx} &= \quad s\,A\,(\cos sx - \mathfrak{Cos}.\,sx) - s\,A'\,(\sin sx + \mathfrak{Sin}.\,sx) \\ \frac{d^2g}{dx} &= -s^2A\,(\sin sx + \mathfrak{Sin}.\,sx) - s^2A'\,(\cos sx + \mathfrak{Cos}.\,sx) \\ \frac{d^3g}{dx^3} &= -s^3A\,(\cos sx + \mathfrak{Cos}.\,sx) + s^3A'\,(\sin sx - \mathfrak{Sin}.\,sx) \end{aligned}$$

Die auf g' sich beziehenden Ableitungen werden sein

$$26)\qquad \begin{aligned} \frac{dg'}{d\xi} &= \quad s\,(L\cos s\xi - L'\sin s\xi + M\,\mathfrak{Cos}\,.\,s\xi + M'\,\mathfrak{Sin}\,.\,s\xi) \\ \frac{d^2g'}{d\xi^2} &= -s^2\,(L\sin .\,s\xi + L'\cos s\xi - M\,\mathfrak{Sin}\,.\,s\xi - M'\,\mathfrak{Cos}\,.\,s\xi) \\ \frac{d^3g'}{d\xi^3} &= -s^3\,(L\cos s\xi - L'\sin .\,s\xi - M\,\mathfrak{Cos}\,.\,s\xi - M'\,\mathfrak{Sin}\,.\,s\xi) \end{aligned}$$

und damit kann man sogleich die aus 22) folgenden Bedingungen hinschreiben

$$27)\quad \begin{aligned} &A(\sin sa - \mathfrak{Sin}\, sa) + A'(\cos sa - \mathfrak{Cos}\, sa) = L\sin sa + L'\cos sa + M\,\mathfrak{Sin}\, sa + M'\,\mathfrak{Cos}\, sa \\ &A(\cos sa - \mathfrak{Cos}\, sa) - A'(\sin sa - \mathfrak{Sin}\, sa) = L\cos sa - L'\sin sa + M\,\mathfrak{Cos}\, sa + M'\,\mathfrak{Sin}\, sa \end{aligned}$$

eben so die aus 23) sich ergebenden

$$28)\quad \begin{aligned} &L\sin sl + L'\cos sl - M\,\mathfrak{Sin}\, sl - M'\,\mathfrak{Cos}\, sl = 0 \\ &L\cos sl - L'\sin sl - M\,\mathfrak{Cos}.\, sl - M'\,\mathfrak{Sin}\, sl = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 21) führen auf gewisse Integrale, deren Werthe leicht zu erhalten sind, es gibt sie die folgende Tabelle:

$$\int_a^l \sin s\xi'\,.\,d\xi' = -\frac{1}{s}(\cos sl - \cos sa);\quad \int_a^l \cos s\xi'\,.\,d\xi = \frac{1}{s}(\sin sl - \sin sa);$$

$$\int_a^l \mathfrak{Sin}\, s\xi'\,.\,d\xi' = \frac{1}{s}(\mathfrak{Cos}\, sl - \mathfrak{Cos}\, sa);\quad \int_a^l \mathfrak{Cos}\, s\xi'\,.\,d\xi' = \frac{1}{s}(\mathfrak{Sin}\, sl - \mathfrak{Sin}\, sa).$$

$$29)\quad \begin{aligned} &\int_a^l \xi' \sin s\xi'\,.\,d\xi' = \frac{1}{s^2}(\sin sl - \sin sa - sl\cos sl + sa\cos sa); \\ &\int_a^l \xi' \cos s\xi'\,.\,d\xi' = \frac{1}{s^2}(\cos sl - \cos sa + sl\sin sl - sa\sin sa); \\ &\int_a^l \xi'\,\mathfrak{Sin}\, s\xi'\,.\,d\xi' = -\frac{1}{s^2}(\mathfrak{Sin}\, sl - \mathfrak{Sin}\, sa - sl\,\mathfrak{Cos}\, sl + sa\,\mathfrak{Cos}\, sa); \\ &\int_a^l \xi'\,\mathfrak{Cos}\, s\xi'\,.\,d\xi' = -\frac{1}{s^2}(\mathfrak{Cos}\, sl - \mathfrak{Cos}\, sa - sl\,\mathfrak{Sin}\, sl + sa\,\mathfrak{Sin}\, sa). \end{aligned}$$

Die Substitutionen der entsprechenden Ausdrücke in 21) ergeben, wenn man zugleich die Bedingungen 28) berücksichtiget

$$\begin{aligned} 30)\; A(\sin sa + \mathfrak{Sin}\, sa) + A'(\cos sa + \mathfrak{Cos}\, sa) = {} & L\sin sa + L'\cos sa - M\,\mathfrak{Sin}\, sa - M'\,\mathfrak{Cos}\, sa - \\ & -\frac{s^2}{\partial\varphi}\mathfrak{MU}\Big\{A(\sin sa - \mathfrak{Sin}\, sa) + A'(\cos sa - \mathfrak{Cos}\, sa)\Big\} - \\ & -\frac{s^3}{\partial\varphi}\,\mathfrak{T}\,\Big\{A(\cos sa - \mathfrak{Cos}\, sa) - A'(\sin sa - \mathfrak{Sin}\, sa)\Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 31)\; A(\cos sa + \mathfrak{Cos}\, sa) - A'(\sin sa + \mathfrak{Sin}.\, sa) = {} & L\cos sa - L'\sin sa - M\,\mathfrak{Cos}\, sa - M'\,\mathfrak{Sin}\, sa + \\ & +\frac{s}{\partial\varphi}\,\mathfrak{M}\,\Big\{A(\sin sa - \mathfrak{Sin}\, sa) + A'(\cos sa - \mathfrak{Cos}\, sa\Big\} + \\ & +\frac{s^2}{\partial\varphi}\mathfrak{UM}\Big\{A(\cos sa - \mathfrak{Cos}\, sa) - A'(\sin sa - \mathfrak{Sin}\, sa\Big\} \end{aligned}$$

Wenn man die erste der Gleichungen 27) sowohl zu 30) addirt, als auch davon abzieht, dasselbe mit der zweiten der Gleichung 27) und 31) macht, so erhält man vier neue Gleichungen, nämlich:

$$\begin{aligned} 32)\quad & A\Big\{2\sin sa + \alpha\Big\} + A'\Big\{2\cos sa + \alpha'\Big\} = 2L\sin sa + 2L'\cos sa \\ 33)\quad & A\Big\{2\,\mathfrak{Sin}\, sa + \alpha\Big\} + A'\Big\{2\,\mathfrak{Cos}\, sa + \alpha'\Big\} = -2M\,\mathfrak{Sin}\, sa - 2M'\,\mathfrak{Cos}\, sa \\ 34)\quad & A\Big\{2\cos sa + \beta\Big\} - A'\Big\{2\sin sa + \beta'\Big\} = 2L\cos sa - 2L'\sin sa \\ 35)\quad & A\Big\{2\,\mathfrak{Cos}\, sa + \beta\Big\} + A'\Big\{2\,\mathfrak{Sin}\, sa - \beta'\Big\} = -2M\,\mathfrak{Cos}\, sa - 2M'\,\mathfrak{Sin}\, sa \end{aligned}$$

wo folgende Abkürzungen eingeführt wurden

$$36)\quad \begin{aligned}
\alpha &= \frac{s^2}{\partial\varphi}\,\mathfrak{M}\mathfrak{U}\,(\sin sa - \mathrm{Sin}\, sa) + \frac{s^3}{\partial\varphi}\,\mathfrak{T}\,.\,(\cos sa - \mathrm{Cos}\,.\,sa)\\
\alpha' &= \frac{s^2}{\partial\varphi}\,\mathfrak{M}\mathfrak{U}\,(\cos sa - \mathrm{Cos}\,.\,sa) - \frac{s^3}{\partial\varphi}\,\mathfrak{T}\,.\,(\sin sa + \mathrm{Sin}\,.\,sa)\\
\beta &= -\frac{s}{\partial\varphi}\,\mathfrak{M}\,\ (\sin sa - \mathrm{Sin}\, sa) - \frac{s^2}{\partial\varphi}\,\mathfrak{M}\mathfrak{U}\,(\cos sa - \mathrm{Cos}\,.\,sa)\\
\beta' &= \frac{s}{\partial\varphi}\,\mathfrak{M}\,\ (\cos sa - \mathrm{Cos}\, sa) - \frac{s^2}{\partial\varphi}\,\mathfrak{M}\mathfrak{U}\,(\sin sa + \mathrm{Sin}\, sa).
\end{aligned}$$

Aus der Combination von Gleichung 32) und 34) erhält man L und L', und eben so M und M' aus der Combination von Gleichung 33) und 35) blos durch die Constanten A und A' und die übrigen Grössen, die durch das Problem gegeben sind, wie sie folgen, ausgedrückt:

$$37)\quad \begin{aligned}
L &= \frac{A}{2}\,(2 + \alpha\sin sa + \beta\cos sa) + \frac{A'}{2}\,(\alpha'\sin sa - \beta'\cos sa)\\
L' &= \frac{A}{2}\,(\alpha\cos sa - \beta\sin sa) + \frac{A'}{2}\,(2 + \alpha'\cos sa + \beta'\sin sa)\\
M &= \frac{A}{2}\,(-2 + \alpha\,\mathrm{Sin}\, sa - \beta\,\mathrm{Cos}\,.\,sa) + \frac{A'}{2}\,(\alpha'\,\mathrm{Sin}\,.\,sa + \beta'\,\mathrm{Cos}\,.\,sa)\\
M' &= \frac{A}{2}\,(-\alpha\,\mathrm{Cos}\,.\,sa + \beta\,\mathrm{Sin}\, sa) - \frac{A'}{2}\,(2 + \alpha'\,\mathrm{Cos}\,.\,sa + \beta'\,\mathrm{Sin}\,.\,sa).
\end{aligned}$$

Die Gleichungen 28) geben aber noch zwei Relationen zwischen L, L', M, M', die auch erfüllt sein müssen, und die nach ausgeführten Substitutionen von Gleichungen 37) zur Bestimmung von A, A' und s dienen werden. Berücksichtigt man hiebei die Relationen

$$38)\quad \begin{aligned}
&\mathrm{Cos}\,.\,sl\,\mathrm{Cos}\,.\,sa \mp \mathrm{Sin}\, sl\,.\,\mathrm{Sin}\, sa = \mathrm{Cos}\, s\,(l \mp a)\\
&\mathrm{Sin}\,.\,sl\,\mathrm{Cos}\,.\,sa \mp \mathrm{Cos}\,.\,sl\ \mathrm{Sin}\, sa = \mathrm{Sin}\, s\,(l \mp a),
\end{aligned}$$

so können diese zwei Endgleichungen in folgende Form gebracht werden:

$$39)\ A\left\{2\left(\sin sl + \mathrm{Sin}\, sl\right) + \alpha\left(\cos s\,(l-a) + \mathrm{Cos}\, s\,(l-a)\right) + \beta\left(\sin s\,(l-a) + \mathrm{Sin}\, s\,(l-a)\right)\right\} =$$
$$= -A'\left\{2\left(\cos sl + \mathrm{Cos}\,.\,sl\right) + \alpha'\left(\cos s(l-a) + \mathrm{Cos}\, s(l-a)\right) - \beta'\left(\sin s(l-a) + \mathrm{Sin}\, s(l-a)\right)\right\}$$

$$40)\ A'\left\{2\left(\sin sl - \mathrm{Sin}\, sl\right) + \alpha'\left(\sin s\,(l-a) - \mathrm{Sin}\, s\,(l-a)\right) + \beta'\left(\cos s\,(l-a) + \mathrm{Cos}\, s\,(l-a)\right)\right\} =$$
$$= \quad A\left\{2\left(\cos l + \mathrm{Cos}\, sl\right) - \alpha\left(\sin s(l-a) - \mathrm{Sin}\, s(l-a)\right) + \beta\left(\cos s(l-a) + \mathrm{Cos}\,.\,s(l-a)\right)\right\}$$

Die Grössen A, A' und s bestimmen sich daraus wie folgt. Zunächst kömmt man durch Multiplication von 39) und 40) wie sie über einander stehen, zu einer transcendenten Gleichung, die nur s enthält, wenn man zu beiden Seiten der Gleichung AA' weglässt. Da also alle übrigen Constanten, die bis jetzt noch unbestimmt blieben, daraus verschwinden, so muss

sie auch identisch sein mit derjenigen, die man aus den h enthaltenden Theilen der Gleichungen 20) bis 23) erhalten hätte. Die Wurzeln dieser Gleichung liefern die möglichen Werthe von s, und daraus die zugehörige Schwingungsdauer des Stabes τ nach der Gleichung

$$\tau = \frac{2\pi l^2}{s^2\gamma}. \tag{41}$$

Da es für das Folgende nothwendig ist, so mögen einige Zwischenrechnungen angedeutet werden. Zunächst gelangt man nach einigen Reductionen zu dem Ausdruck

$$\begin{aligned}
&4(\cos sl\,.\,\mathfrak{Cos}\,sl+1)+\\
&+\alpha\Big\{(\sin sl-\mathfrak{Sin}\,sl)(\cos s(l-a)+\mathfrak{Cos}\,s(l-a))-(\cos sl+\mathfrak{Cos}\,sl)(\sin s(l-a)-\mathfrak{Sin}\,s(l-a))\Big\}+\\
&+\alpha'\Big\{(\sin sl-\mathfrak{Sin}\,sl)(\sin s(l-a)-\mathfrak{Sin}\,s(l-a))+(\cos sl+\mathfrak{Cos}\,sl)(\cos s(l-a)+\mathfrak{Cos}\,s(l-a))\Big\}+\\
&+\beta\Big\{(\cos sl+\mathfrak{Cos}\,sl)(\cos s(l-a)+\mathfrak{Cos}\,s(l-a))+(\sin sl-\mathfrak{Sin}\,sl)(\sin s(l-a)+\mathfrak{Sin}\,s(l-a))\Big\}+\\
&+\beta'\Big\{(\sin sl+\mathfrak{Sin}\,sl)(\cos s(l-a)+\mathfrak{Cos}\,s(l-a))-(\cos sl+\mathfrak{Cos}\,sl)(\sin s(l-a)+\mathfrak{Sin}\,s(l-a))\Big\}+\\
&+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)(\cos s(l-a)\,\mathfrak{Cos}\,s(l-a)+1)=0;
\end{aligned} \tag{42a}$$

oder, indem man die Multiplicationen ausführt, und dabei auf Gleichungen 38) Rücksicht nimmt

$$\begin{aligned}
0 &= 4(\cos sl\,.\,\mathfrak{Cos}\,sl+1)+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)(\cos s(l-a)\,.\,\mathfrak{Cos}\,s(l-a)+1)+\\
&+\alpha(\sin sa-\mathfrak{Sin}\,.\,sa)+\alpha'(\cos sa+\mathfrak{Cos}\,sa)+\beta(\cos sa+\mathfrak{Cos}\,sa)+\beta'(\sin sa+\mathfrak{Sin}\,sa)\\
&+\alpha(\sin sa\,.\,\mathfrak{Cos}\,s(l-a)-\sin s(l-a)\,\mathfrak{Cos}\,sl+\cos sl\,.\,\mathfrak{Sin}\,s(l-a)-\cos s(l-a)\,\mathfrak{Sin}\,sl)\\
&+\alpha'(-\sin sl\,.\,\mathfrak{Sin}\,s(l-a)+\sin s(l-a)\,\mathfrak{Sin}\,sl+\cos sl\,\mathfrak{Cos}\,s(l-a)+\cos s(l-a)\,\mathfrak{Cos}\,sl)\\
&+\beta(\sin sl\,.\,\mathfrak{Sin}\,s(l-a)-\sin s(l-a)\,\mathfrak{Sin}\,sl+\cos sl\,\mathfrak{Cos}\,s(l-a)+\cos s(l-a)\,\mathfrak{Cos}\,sl)\\
&+\beta'(\sin sl\,.\,\mathfrak{Cos}\,s(l-a)-\sin s(l-a)\,\mathfrak{Cos}\,sl-\cos sl\,\mathfrak{Sin}\,s(l-a)+\cos s(l-a)\,\mathfrak{Sin}\,sl)
\end{aligned} \tag{42b}$$

Es erübrigt nun noch die Werthe von α, α', β, β' aus 36) einzuführen. Man findet dabei

$$\alpha\beta'+\beta\alpha' = \frac{2s^4}{\partial^2\varphi^2}(\mathfrak{M}\mathfrak{U}^2-\mathfrak{T}\mathfrak{M})(\cos sa\,.\,\mathfrak{Cos}\,sa-1)$$

und die Summe der folgenden vier Glieder

$$\begin{aligned}
-4\frac{s^2}{\partial\varphi}\mathfrak{M}\mathfrak{U}\,.\,\sin sa\,.\,\mathfrak{Sin}\,sa-2\frac{s^3}{\partial\varphi}\mathfrak{T}(\sin sa\,\mathfrak{Cos}\,.\,sa+\cos sa\,\mathfrak{Sin}\,sa)-\\
-2\frac{s}{\partial\varphi}\mathfrak{M}(\sin sa\,\mathfrak{Cos}\,.\,sa-\cos sa\,\mathfrak{Sin}\,sa),
\end{aligned}$$

so dass man mit Beihilfe der Relationen 38) endlich zu folgender Gleichung gelangt:

$$
\begin{aligned}
& 4\left(\cos sl\,.\,\mathfrak{Cof}\,sl+1\right)+2\frac{s^4\mathfrak{M}}{\partial^2\varphi^2}\left(\mathfrak{M}\mathfrak{U}^2-\mathfrak{T}\right)\left(\cos sa\,\mathfrak{Cof}\,sa-1\right)\left(\cos s(l-a)\,\mathfrak{Cof}\,s(l-a)+1\right)\\
& -\frac{s^3\mathfrak{T}}{\partial\varphi}\Big\{2\left(\sin sa\,\mathfrak{Cof}\,sa+\cos sa\,\mathfrak{Sin}\,sa\right)-2\left(\sin s(l-a)\mathfrak{Cof}\,s(l-a)+\cos s(l-a)\mathfrak{Sin}\,s(l-a)\right)+\\
& \quad+\left(\sin sl\,\mathfrak{Cof}\,sl+\cos sl\,\mathfrak{Sin}\,sl\right)+\left(\sin sl\,\mathfrak{Cof}\,s(l-2a)+\cos s(l-2a)\,\mathfrak{Sin}\,sl\right)\Big\}+\\
& +\frac{s^2\mathfrak{M}\mathfrak{U}}{\partial\varphi}\Big\{\sin s(l-2a)\,\mathfrak{Sin}\,sl+\sin sl\,\mathfrak{Sin}\,s(l-2a)-2\sin s(l-a)\,\mathfrak{Sin}\,s(l-a)-2\sin sa\,\mathfrak{Sin}\,sa\Big\}\\
& -\frac{s\mathfrak{M}}{\partial\varphi}\Big\{2\left(\sin sa\,\mathfrak{Cof}\,sa-\cos sa\,\mathfrak{Sin}\,sa\right)-2\left(\sin s(l-a)\,\mathfrak{Cof}\,s(l-a)-\cos s(l-a)\,\mathfrak{Sin}\,s(l-a)\right)\\
& \quad+\left(\sin sl\,\mathfrak{Cof}\,sl-\cos sl\,\mathfrak{Sin}\,sl\right)+\left(\sin sl\,\mathfrak{Cof}\,s(l-2a)-\cos s(l-2a)\,\mathfrak{Sin}\,sl\right)\Big\}=0.
\end{aligned}
\tag{42c}
$$

Die Werthe von A und A' können auf zweierlei Weise ausgedrückt werden, je nachdem man die Gleichung 39) oder 40) benützt. In jeden Fall hat man aber nothwendig zwei neue Constante E und E_1 einzuführen, die von dem Anfangszustand des Stabes abhängen werden. Man erhält also entweder

$$
\begin{aligned}
A = & -E\Big[2\left(\cos sl+\mathfrak{Cof}\,sl\right)+\left(\cos sa-\mathfrak{Cof}\,sa\right)\Big\{\frac{s^2\mathfrak{M}\mathfrak{U}}{\partial\varphi}\left(\cos s(l-a)+\mathfrak{Cof}\,s(l-a)\right)\\
& -\frac{s\mathfrak{M}}{\partial\varphi}\left(\sin s(l-a)+\mathfrak{Sin}\,s(l-a)\right)\Big\}+\left(\sin sa+\mathfrak{Sin}\,sa\right)\Big\{\frac{s^2\mathfrak{M}\mathfrak{U}}{\partial\varphi}\left(\sin s(l-a)+\mathfrak{Sin}\,s(l-a)\right)\\
& -\frac{s^3\mathfrak{T}}{\partial\varphi}\left(\cos s(l-a)+\mathfrak{Cof}\,s(l-a)\right)\Big\}\Big]\\
A' = & \;\;E\Big[2\left(\sin sl+\mathfrak{Sin}\,sl\right)+\left(\sin sa-\mathfrak{Sin}\,sa\right)\Big\{\frac{s^2\mathfrak{M}\mathfrak{U}}{\partial\varphi}\left(\cos s(l-a)+\mathfrak{Cof}\,s(l-a)\right)\\
& -\frac{s\mathfrak{M}}{\partial\varphi}\left(\sin s(l-a)+\mathfrak{Sin}\,s(l-a)\right)\Big\}-\left(\cos sa-\mathfrak{Cof}\,sa\right)\Big\{\frac{s^2\mathfrak{M}\mathfrak{U}}{\partial\varphi}\left(\sin s(l-a)+\mathfrak{Sin}\,s(l-a)\right)\\
& -\frac{s^3\mathfrak{T}}{\partial\varphi}\left(\cos s(l-a)+\mathfrak{Cof}\,s(l-a)\right)\Big\}\Big]
\end{aligned}
\tag{43}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
A = & \;\;E_1\Big[2\left(\sin sl-\mathfrak{Sin}\,sl\right)+\left(\cos sa-\mathfrak{Cof}\,sa\right)\Big\{\frac{s^2\mathfrak{M}\mathfrak{U}}{\partial\varphi}\left(\sin s(l-a)-\mathfrak{Sin}\,s(l-a)\right)\\
& +\frac{s\mathfrak{M}}{\partial\varphi}\left(\cos s(l-a)+\mathfrak{Cof}\,s(l-a)\right)\Big\}-\left(\sin sa+\mathfrak{Sin}\,sa\right)\Big\{\frac{s^2\mathfrak{M}\mathfrak{U}}{\partial\varphi}\left(\cos s(l-a)+\mathfrak{Cof}\,s(l-a)\right)\\
& +\frac{s^3\mathfrak{T}}{\partial\varphi}\left(\sin s(l-a)-\mathfrak{Sin}\,s(l-a)\right)\Big\}\Big]\\
A' = & \;\;E_1\Big[2\left(\cos sl+\mathfrak{Cof}\,sl\right)-\left(\sin sa-\mathfrak{Sin}\,sa\right)\Big\{\frac{s^2\mathfrak{M}\mathfrak{U}}{\partial\varphi}\left(\sin s(l-a)-\mathfrak{Sin}\,s(l-a)\right)\\
& +\frac{s\mathfrak{M}}{\partial\varphi}\left(\cos s(l-a)+\mathfrak{Cof}\,s(l-a)\right)\Big\}-\left(\cos sa-\mathfrak{Cof}\,sa\right)\Big\{\frac{s^2\mathfrak{M}\mathfrak{U}}{\partial\varphi}\left(\cos s(l-a)+\mathfrak{Cof}\,s(l-a)\right)\\
& +\frac{s^3\mathfrak{T}}{\partial\varphi}\left(\sin s(l-a)-\mathfrak{Sin}\,s(l-a)\right)\Big\}\Big]
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Bezeichnet man die mit E und E_1 multiplicirten Ausdrücke resp. mit G, G' und G_1, G'_1, so erhält man aus Gleichung 6)

45) $g = -E\{G(\sin sx - \mathfrak{Sin}\, sx) - G'(\cos x - \mathfrak{Cos}\, sx)\} = E_1\{G_1(\sin sx - \mathfrak{Sin}\, sx) + G'_1(\cos x - \mathfrak{Cos}\, sx)\}.$

Da sich durch Substitution von A und A' in die Werthe von L, L', M, M' keine besondern Reductionen ergeben, so wird es erlaubt sein, diese Substitution nur angezeigt zu lassen, und dabei zur Abkürzung zu setzen

46) $$\begin{aligned} -2G - \sin sa\,(G\alpha - G'\alpha') - \cos sa\,(G\beta + G'\beta') &= 2\Gamma \\ 2G_1 + \sin sa\,(G_1\alpha + G_1'\alpha') + \cos sa\,(G_1\beta - G_1'\beta') &= 2\Gamma_1 \end{aligned}$$

47) $$\begin{aligned} 2G' - \cos sa\,(G\alpha - G'\alpha') + \sin sa\,(G\beta + G'\beta') &= 2\Gamma' \\ 2G_1' + \cos sa\,(G_1\alpha + G_1'\alpha') - \sin sa\,(G_1\beta - G_1'\beta') &= 2\Gamma'_1 \end{aligned}$$

48) $$\begin{aligned} 2G - \mathfrak{Sin}\, sa\,(G\alpha - G'\alpha') + \mathfrak{Cos}\, sa\,(G\beta + G'\beta') &= 2\Omega \\ -2G_1 + \mathfrak{Sin}\, sa\,(G_1\alpha + G_1'\alpha') - \mathfrak{Cos}\, sa\,(G_1\beta - G_1'\beta') &= 2\Omega_1 \end{aligned}$$

49) $$\begin{aligned} -2G' + \mathfrak{Cos}\, sa\,(G\alpha - G'\alpha') - \mathfrak{Sin}\, sa\,(G\beta + G'\beta') &= 2\Omega' \\ -2G_1' - \mathfrak{Cos}\, sa\,(G_1\alpha + G_1'\alpha') + \mathfrak{Sin}\, sa\,(G_1\beta - G_1'\beta') &= 2\Omega'_1 \end{aligned}$$

so dass man haben wird

50) $L = E\Gamma = E_1\Gamma_1;\; L' = E'\Gamma' = E_1'\Gamma_1';\; M = E\Omega = E_1\Omega_1;\; M' = E'\Omega' = E_1\Omega_1$

in Folge dessen aus Gleiehung 7) hervorgeht

51) $g' = E\{\Gamma \sin s\xi + \Omega\, \mathfrak{Sin}\, s\xi + \Gamma' \cos s\xi + \Omega'\, \mathfrak{Cos}\, s\xi\} = E_1\{\Gamma_1 \sin s\xi + \Omega_1\, \mathfrak{Sin}\, s\xi + \Gamma_1' \cos s\xi + \Omega_1'\, \mathfrak{Cos}\, s\xi\}$

Für die Functionen h und h' seien die den E und E_1 entsprechenden Constanten mit E und E_1' bezeichnet; dann kann man ihre Werthe wegen der schon oben gemachten Bemerkung sogleich hinschreiben, denn es kommt

52) $$\begin{gathered} C = E'G = E_1'G_1 \quad ; \quad C' = E'G' = E_1'G_1' \\ P = E'\Gamma = E_1'\Gamma_1;\;\; P' = E'\Gamma' = E_1'\Gamma_1';\;\; Q = E'\Omega = E_1'\Omega;\;\; Q' = E'\Omega' = E_1'\Omega_1' \end{gathered}$$

zu setzen, und wenn man noch zur weitern Abkürzung die Bezeichnungen einführt

53) $$\begin{aligned} -G\,(\sin sx - \mathfrak{Sin}\, sx) + G'\,(\cos sx - \mathfrak{Cos}\, sx) &= X \\ G_1\,(\sin sx - \mathfrak{Sin}\, sx) + G_1\,(\cos sx - \mathfrak{Cos}\, sx) &= X_1 \end{aligned}$$

54) $$\begin{aligned} \Gamma \sin s\xi + \Omega\, \mathfrak{Sin}\, s\xi + \Gamma' \cos \xi + \Omega' \cos s\xi &= \Xi \\ \Gamma_1 \sin s\xi + \Omega_1\, \mathfrak{Sin}\, s\xi + \Gamma_1' \cos \xi + \Omega_1'\, \mathfrak{Cos}\, s\xi &= \Xi_1 \end{aligned}$$

so wird also

55) $$h = E'X = E_1'X_1 \qquad h' = E'\Xi = E_1'\Xi_1$$

und für y und η in den beiden Theilen des Stabes wird man haben

56) $$\begin{aligned} y &= X\,(E \sin \gamma s^2 t + E' \cos \gamma s^2 t) \\ y &= X_1(E_1 \sin \gamma s^2 t + E_1' \cos \gamma s^2 t) \end{aligned}$$

57) $$\begin{aligned} \eta &= \Xi\,(E \sin \gamma s^2 t + E' \cos \gamma s^2 t) \\ \eta &= \Xi_1\,(E_1 \sin \gamma s^2 t + E_1' \cos \gamma s^2 t) \end{aligned}$$

wie vorauszusehen von derselben Form wie bei unbelasteten Stäben. Da aber X und Ξ verschiedene Functionen von x sind, so wird für jeden Zeitmoment t, die Curve der Mittellinie aus zwei Theilen bestehen, die nach verschiedenen Gleichungen gebildet sind, und in dem Punkte $\mathfrak{M}$ oder (a, b) so zusammentreffen, dass sie hier die Ordinate und Tangente gemeinschaftlich haben. Übrigens unterscheidet sich das Gesetz der Curve von $x = 0$ bis $x = a$ nicht von demjenigen bei unbelasteten Stäben.

Es erübrigt nur noch, die Constanten E, E', E_1, E_1' aus den gegebenen Anfangszuständen des Stabes zu bestimmen, und die gewöhnlich befolgte Methode wird auch hier mit einigen Modificationen zum Ziele führen.

Bezeichnet $[y]$ die Ordinate irgend eines Punktes des Stabes zur Zeit t, so hat man:

$$\frac{d[y^2]}{dt^2} = -\gamma^2 s^4 [y].$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $[X]$ d$[x]$, wo $[X]$ einen der Ausdrücke 53) oder 54) bezeichnet, und integrirt in der ganzen Ausdehnung des Stabes, so wird

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^l [X]\,[y]\,dx = -\gamma^2 s^4 \int_0^l [X]\,[y]\,dx.$$

Da man aber hier jedes $[y]$ mit dem zugehörigen $[X]$ zu multipliciren hat, so muss man im vorliegenden Falle das Integral in zwei Theile zerlegen, nämlich

$$\frac{d^2}{dt^2}\left\{\int_0^a Xy\,dx + \int_a^l \Xi\eta\,d\xi\right\} = -\gamma^2 s^4 \left\{\int_0^a Xy\,dx + \int_a^l \Xi\eta\,d\xi\right\}.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung ergibt

$$58)\qquad \int_0^a Xy\,dx + \int_a^l \Xi\eta\,d\xi = H\sin s^2\gamma t + H'\cos s^2\gamma t.$$

Setzt man im linken Theil dieser Gleichung für y und η ihre Werthe aus 56) und 57), so geht sie bekanntlich in eine identische über, die für jedes t erfüllt ist, daher aus dieser Substitution folgt, wenn y_0 und η_0 die Ordinaten für $t = 0$ bedeuten:

$$59)\qquad E'\left\{\int_0^a X^2dx + \int_a^l \Xi^2 d\xi\right\} = H'$$

$$E' = \frac{\int_0^a X^2 y_0\,dx + \int_a^l \Xi\eta_0 d\xi}{\int_0^a X^2dx + \int_a^l \Xi^2 d\xi}$$

und wie man leicht sieht, hätte man auf dieselbe Weise gefunden

$$59)\qquad E_1' = \frac{\int_0^a X_1 y_0 dx + \int_a^l \Xi_1\eta_0 d\xi}{\int_0^a X_1^2 dx + \int_a^l \Xi_1^2 d\xi}$$

Differentiirt man 58) nach t, und nennt u_0 und v_0 die zur Zeit $t = 0$ stattfindenden Geschwindigkeiten, so findet man durch eine ähnliche Substitution wie oben

$$60) \qquad E = \frac{\int_0^a X u_0 dx + \int_a^l \Xi\, v_0\, d\xi}{\int_0^a X^2\, dx + \int_a^l \Xi^2\, d\xi} \qquad E_1 = \frac{\int_0^a X_4\, u_0\, dx + \int_a^l \Xi\, v_0\, d\xi}{\int_0^a X^2\, dx + \int_a^l \Xi^2\, d\xi}$$

Hiemit wäre der Zustand des Stabes zu jeder beliebigen Zeit gegeben durch die Anfangswerthe von y und u, so wie durch die übrigen Constanten und keine unbestimmte Grösse mehr vorhanden.

Die anzuwendenden Gleichungen sind jedoch complicirter Natur und die Schwingungsdauer, deren Kenntniss von besonderer Wichtigkeit ist, hängt von der Auflösung der weitläufigen transcendenten Gleichung 42) ab. Man muss sich daher begnügen, die Auflösung für die am häufigsten vorkommenden Fälle wenigstens durch eine entsprechende Näherung zu geben,

Vor Allem mag bemerkt werden, dass die Gleichung 42) sowohl als auch 43), 44), 53) 54), 56), 57) für $\mathfrak{M} = 0$, $\mathfrak{T} = 0$, und für $a = 0$ in die entsprechenden Gleichungen für unbelastete Stäbe übergehen, nämlich in:

$$\begin{aligned} \cos sl\, \mathfrak{Cof}\, sl + 1 &= 0 \\ A &= -2E(\cos sl + \mathfrak{Cof}\ sl) \\ 61) \qquad A' &= 2E(\sin sl + \mathfrak{Sin} . sl) \\ X = 2(\sin sl + \mathfrak{Sin}\, sl)&(\cos sx - \mathfrak{Cof}\, sx) - 2(\cos sl + \mathfrak{Cof}\, sl)(\sin sx - \mathfrak{Sin}\, sx) \\ y &= X\{E \sin \gamma s^2 t + E' \cos \gamma s^2 t\}, \end{aligned}$$

wenn man der Einfachheit wegen für A, A', X und y nur die ersteren Ausdrücke beibehält.

Im Folgenden sind diese Gleichungen als Grundlage genommen, weil es besonders erleichtert und übersichtlicher macht, wenn man untersucht, welche Veränderungen durch das Belasten an den entsprechenden Grössen bei unbelasteten Stäben hervorgebracht werden.

a) Ist der Stab in irgend einem Punkte belastet, so kann man wohl annehmen, dass $\mathfrak{M}$ nicht sehr gross sein wird, wenn anders die Bedingung, dass die angehängte Masse nur in einem Punkte befestiget ist, wenigstens angenähert erfüllt wird. In dem Fall, wo die Masse mit einer grösseren Fläche an den Stab anliegt, kann diese entweder nicht als blos träge angenommen werden, da sie eine Biegung erleiden wird, oder wenn sie absolut starr wäre, würde in den Befestigungspunkt keine Biegung eintreten und daher der obere Theil des Stabes, als von den untern getrennt, nur eine Belastung für diesen abgeben.

Man darf also für $a < l$ immer annehmen, dass $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{U}$ keine grossen Werthe haben werden. Berücksichtigt man noch, dass wenn M die Masse des Stabes, T sein Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch seinen Endpunkt gehende, auf der Schwingungsebene senkrechte Drehungsaxe, und U die Entfernung seines Schwerpunktes vom Befestigungspunkt bedeutet, man haben wird

$$\varphi\delta l = M, \qquad \varphi\delta l^3 = 3T, \qquad \varphi^2\delta^2 l^4 = 3MT = 4M^2U^2$$

dass also, wenn man

$$sl = \sigma, \qquad s = \frac{\sigma}{l}$$

setzt, nur die Verhältnisse

$$\frac{\mathfrak{T}}{3T}\ ,\qquad \frac{\mathfrak{U}}{4U}$$

vorkommen, die aber sehr kleine Zahlen sein werden, so wird man sich wohl erlauben dürfen in diesen Fall für 42) zu setzen

$$\begin{aligned}(\cos\sigma\,.\,\mathfrak{Cos}\,\sigma+1)\;-\frac{\mathfrak{M}}{M}\frac{\sigma}{4}\Big\{&2\Big(\sin\sigma\frac{a}{l}\,\mathfrak{Cos}\,\sigma\frac{a}{l}-\cos\sigma\frac{a}{l}\,\mathfrak{Sin}\,\sigma\frac{a}{l}\Big)\\ 62)\qquad &-2\Big(\sin\sigma(1-\frac{a}{l})\,\mathfrak{Cos}\,\sigma(1-\frac{a}{l})-\cos\sigma\,(1-\frac{a}{l})\,\mathfrak{Sin}\,\sigma\,(1-\frac{a}{l})\Big)\\ &+\Big(\sin\sigma\,\mathfrak{Cos}\,\sigma-\cos\sigma\,\mathfrak{Sin}\,\sigma\Big)+\Big(\sin\sigma\,\mathfrak{Cos}\,\sigma(1-\frac{2a}{l})-\cos\sigma\,(1-\frac{2a}{l}\,\mathfrak{Sin}\,\sigma\Big)\Big\}=0.\end{aligned}$$

Denkt man sich unter den beiden Theilen dieser Gleichung die Ordinaten zweier Curven, so dass die σ die zugehörigen Abscissen bezeichnen, so stellt die Abscisse eines Durchschnittspunktes auch eine reelle Wurzel der Gleichung 62) vor. Die Curve

$$63)\qquad y=\cos\sigma\,\mathfrak{Cos}\,\sigma+1$$

schneidet die Abscissenaxe in den Entfernungen 1·87011 und dann mit immer grösserer Näherung in $3\,\frac{\pi}{2}$, $5\,\frac{\pi}{2}$ . . . . $(2n+1)\,\frac{\pi}{2}$. Zwischen je zwei solcher Punkte liegt nur ein Maximum, denn man findet die zugehörigen Abscissen aus der Gleichung

$$tng\,\sigma=\frac{\mathfrak{Sin}\,\sigma}{\mathfrak{Cos}\,\sigma}$$

wo der rechte Theil schon für $\sigma=2$, 0·964 wird, so dass man mit grosser Näherung die Einheit setzen kann, und daher $\sigma=\Big(0,\,5\,\frac{\pi}{4},\,9\,\frac{\pi}{4},\,\ldots\Big)$ die Abscissen der Maxima sind. Zwischen je zwei Durchschnittspunkte fällt aber auch nur ein Inflexionspunkt, denn man hat

$$\frac{d^2y}{d\sigma^2}=-\,2\,\sin\sigma\,\mathfrak{Sin}\,\sigma$$

daher die Inflectionspunkte den Abscissen 0, π, 2π . . . entsprechen.

Endlich hat die Curve für jedes σ nur einen Werth von y, und die Maxima wachsen ungemein rasch, sie sind z. B. für

$$\sigma=\frac{5\pi}{4}=3\cdot93\quad,\quad y=-18\cdot0$$

$$\sigma=9\,\frac{\pi}{4}=7\cdot07\quad,\quad y=41\cdot6$$

$$\sigma=13\,\frac{\pi}{4}=10\cdot21\quad,\quad y=-93\cdot01.$$

Die zweite Curve geht für $a=0$ in die Abscissenaxe über, und daher sind dann die Wurzeln der Gleichung 62)

$$1\cdot87011,\quad 3\frac{\pi}{2},\quad 5\frac{\pi}{2},\quad 7\frac{\pi}{2},\quad 9\frac{\pi}{2},\ldots.$$

für den grösst möglichsten Werth von a, d. h. für $a = l$ wird ihre Gleichung

$$y = \frac{\mathfrak{M}}{M} \sigma \left\{ \sin \sigma \, \mathfrak{Cos}\, \sigma - \cos \sigma \, \mathfrak{Sin}\, \sigma \right\}$$

schneidet daher die Abscissenaxe in Punkten für welche man hat

$$\sigma = 0, \; \sigma = 5\frac{\pi}{4}, \; \sigma = 9\frac{\pi}{4}, \; \sigma = 13\frac{\pi}{4} \ldots$$

also an den Stellen, wo die Abscissen der Maxima der ersten Curve hinfallen. Die Durchschnittspunkte der beiden Curven haben also Abscissen, die zwischen $\sigma = (4n+1)\frac{\pi}{4}$ und $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ liegen und da σ für $a < l$ noch grösser werden muss, als für $a = l$, weil die Schwingungsdauer im Allgemeinen um so grösser sein wird je grösser a wird, so sieht man, dass die zweite Curve für $a \begin{smallmatrix} >0 \\ <l \end{smallmatrix}$ die erste so schneidet, dass die Abscissen der Durchschnittspunkte jedenfalls kleiner als $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, aber grösser als $(2n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = (4n+1)\frac{\pi}{4}$ sind. Innerhalb eines solchen Intervalles kann aber nur ein einziger Durchschnittspunkt zu liegen kommen, in Folge der angedeuteten Eigenschaften der ersten Curve, und da in der zweiten Gleichung keiner von den periodischen Gliedern eine Periode kleiner als $\frac{\pi}{4}$ hat.

Je grösser $\mathfrak{M}$ wird, desto mehr nähert sich die zweite Curve einem System von parallelen Linien, die auf der Abscissenaxe senkrecht stehen, und dieselben in Punkten schneiden, deren Abscissen die Wurzeln des in Klammern stehenden Ausdruckes sind, und in der That ist es nur dann möglich, dass die Gleichung 62) erfüllt werden kann, weil $y = 0 . \infty$, möglicher Weise endlich ist. Für $a = l$ würden die Parallelen in $\sigma = 0$, $\sigma = 5\frac{\pi}{4}$, $\sigma = 9\frac{\pi}{4} \ldots$ einschneiden.

Es wurde eben bemerkt, dass für $a > 0$ die Wurzel der Gleichung 62) kleiner sein müsse, als die entsprechende von 63). Für gewisse Werthe von a tritt jedoch eine Ausnahme ein, nämlich wenn der Gleichung 62) dadurch genügt wird, dass sowohl der erste und zweite Theil, jeder für sich gleich Null wird. Um die Möglichkeit zu erweisen, betrachte man die Gleichungen 36) und 42_a), die, wenn man die obigen Näherungen gelten lässt, sein werden:

$$\alpha = 0 \qquad\qquad \alpha' = 0$$

$$\beta = -\sigma \frac{\mathfrak{M}}{M} \left(\sin \sigma \frac{a}{l} - \mathfrak{Sin}\, \sigma \frac{a}{l} \right); \; \beta' = \sigma \frac{\mathfrak{M}}{M} \left(\cos \sigma \frac{a}{l} - \mathfrak{Cos}\, \sigma \frac{a}{l} \right)$$

$$\cos \sigma \, \mathfrak{Cos}\, \sigma + 1 + \frac{1}{4} \left(\cos \sigma \left(1 - \frac{a}{l} \right) + \mathfrak{Cos}\, \sigma \left(1 - \frac{a}{l} \right) \right) \left(\beta (\cos \sigma + \mathfrak{Cos}\, \sigma) + \beta' (\sin \sigma + \mathfrak{Sin}\, \sigma) \right) +$$

$$+ \frac{1}{4} \left(\sin \sigma \left(1 - \frac{a}{l} \right) + \mathfrak{Sin}\, \sigma \left(1 - \frac{a}{l} \right) \right) \left(\beta (\sin \sigma - \mathfrak{Sin}\, \sigma) - \beta' (\cos \sigma + \mathfrak{Cos}\, \sigma) \right) = 0$$

Hätte man also

$$
64)\quad \begin{cases}
\left(\sin\sigma + \mathfrak{Sin}\,\sigma\right)\left(\cos\sigma\frac{a}{l} - \mathfrak{Cos}\,\sigma\frac{a}{l}\right) - \left(\cos\sigma + \mathfrak{Cos}\,\sigma\right)\left(\sin\sigma\frac{a}{l} - \mathfrak{Sin}\,\sigma\frac{a}{l}\right) = 0 \\
\left(\sin\sigma - \mathfrak{Sin}\,\sigma\right)\left(\sin\sigma\frac{a}{l} - \mathfrak{Sin}\,\sigma\frac{a}{l}\right) + \left(\cos\sigma + \mathfrak{Cos}\,\sigma\right)\left(\cos\sigma\frac{a}{l} - \mathfrak{Cos}\,\sigma\frac{a}{l}\right) = 0 \\
\cos\sigma\,\mathfrak{Cos}\,\sigma + 1 = 0
\end{cases}
$$

so wäre die Ausnahme vorhanden.

Die erste der Gleichungen 64) ist aber identisch mit 61), wenn man $X = 0$ und $x = a$ setzt, die zweite würde mit der Gleichung für X_1 zusammenfallen, nach gehöriger Transformation von 52). Die dritte Gleichung ist aber die für unbelastete Stäbe in 61). Die $X = 0$ und $X_1 = 0$ geben diejenigen Werthe von x, für welche an dem unbelasteten Stab Knotenpunkte auftreten, also zeigt sich, dass wenn die Masse an einem der möglichen Knotenpunkte befestiget wird, die zugleich mit $\sigma = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ auftreten, dadurch dieser Werth auch für den belasteten Stab derselbe bleibt, natürlich für dieselben Stellenzeiger der Tonhöhen.

Man kann bemerken, dass sobald man $\mathfrak{T}$ oder $\mathfrak{U}$ nicht gleich 0 setzt, dieser Fall nie eintreten wird, und in der That ist dann die angehängte Masse auch in einem Knotenpunkte als in Bewegung zu betrachten.

Durch die obige Analyse der beiden Curven gewinnt man einen Näherungswerth zur Berechnung der Wurzeln, denn wenn σ eine Wurzel der Gleichung 62) bedeutet, wird man setzen können

$$\sigma = (2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \xi$$

wo das obere Zeichen nur für die kleinste Wurzel eintreffen kann.

Das ξ ist für die grösseren Wurzelwerthe kleiner als 1, nur für die kleinste Wurzel könnte es auch grösser werden, da aber dann $\frac{\pi}{2} - 1$ schon kleiner als 1 ist, so kann man im ersten Falle die Entwickelung nach der Tailor'schen, im zweiten nach der Maclaurin'schen Reihe vornehmen, um eine möglichst rasche Convergenz zu erhalten.

Es ist demnach zu setzen

$$o = f\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right) \pm \xi f'\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\xi^2}{1.2}f''\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right) \pm \ldots.$$

$$o = f(o) \qquad + \sigma f'(o) \qquad + \frac{\sigma^2}{1.2}f''(o) + \ldots.$$

Um aus der ersten dieser Reihen ξ zu bestimmen, wird man diese Reihe so umkehren, dass die Variable ξ nach Potenzen von $-\frac{f\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)}{f'\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)}$ fortschreitet. Die zweite Reihe dürfte selten in Anwendung kommen, da sie ein grosses $\mathfrak{M}$ voraussetzt, dessen Trägheitsmoment wohl nicht vernachlässigt werden kann, also Gleichung 26) überhaupt zu ungenau wird. Die erste Reihe gibt nun, indem man mit $p^n Rm$ den m^{ten} Polynominalcoëfficienten der n^{ten} Potenz der Reihe

$$(\pm\xi) + \frac{\xi^2}{1\cdot 2}\frac{f'\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)}{f\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{(\pm\xi)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{f''\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)}{f\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)} + \ldots$$

bezeichnet

$$(\pm\,\xi) = -\frac{f\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)}{f'\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2}(p^{-2}R2)\left\{\frac{f\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)}{f'\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)}\right\}^2 - \frac{1}{3}(p^{-3}R3)\left\{\frac{f\left(\varkappa\frac{\pi}{\pi}\right)}{f'\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)}\right\}^3 + \ldots$$

oder, indem man beim zweiten Gliede stehen bleibt

$$(\pm\,\xi) = -\frac{f\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)}{f'\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{2}\,\frac{f''\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)f\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)^2}{f'\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)^3}.$$

Bezeichnet man mit σ_0 und σ zwei zu denselben Stellenzeiger der Tonhöhe gehörige Wurzelwerthe für den unbelasteten und belasteten Stab, so hat man, weil $\sigma_0 = \pi\frac{\pi}{2} + \delta$

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 + \frac{(\pm\,\xi) - \delta}{\varkappa\frac{\pi}{2} + \delta} \tag{65)}$$

und hat für $\varkappa = 1$, $\delta = 1{\cdot}8701$, für $\varkappa = (3, 5, 7\ldots)$ aber sehr nahe $\delta = 0$ zu setzen.

Die zur Berechnung der ξ erforderlichen Ausdrücke werden sehr weitläufig, setzt man wieder $\varkappa = (2n+1)$, und

$$\begin{aligned}A = \frac{4M}{\mathfrak{M}}\Bigg\{&(-1)^{\frac{\varkappa-1}{2}}\left[\mathfrak{Cos}\,\varkappa\frac{\pi}{2} + \mathfrak{Cos}\,\varkappa\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2a}{l}\right)\right] + 2\left(\sin\varkappa\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a}{l}\cdot\mathfrak{Cos}\,\varkappa\frac{\pi}{2}\frac{a}{l} - \cos\varkappa\frac{\pi}{2}\frac{a}{l}\mathfrak{Sin}\,\varkappa\frac{\pi}{2}\frac{a}{l}\right) - \\ &-2\left[\sin\varkappa\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{a}{l}\right)\mathfrak{Cos}\,\varkappa\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{a}{l}\right) - \cos\varkappa\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{a}{l}\right)\mathfrak{Sin}\,\varkappa\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{a}{l}\right)\right] \\ &-\cos\varkappa\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2a}{l}\right)\mathfrak{Sin}\,\varkappa\frac{\pi}{2}\Bigg\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B = \frac{4M}{\mathfrak{M}}\Bigg\{&(-1)^{\frac{\varkappa-1}{2}}\left[2\,\mathfrak{Sin}\,\varkappa\frac{\pi}{2} + \left(1-\frac{2a}{l}\right)\mathfrak{Sin}\,\varkappa\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2a}{l}\right)\right] + 4\frac{a}{l}\sin\varkappa\frac{\pi}{2}\frac{a}{l}\mathfrak{Sin}\,\varkappa\frac{\pi}{\pi}\frac{a}{l} - \\ &-4\left(1-\frac{a}{l}\right)\sin\varkappa\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{a}{l}\right)\mathfrak{Sin}\,\varkappa\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{a}{l}\right) + \\ &+\left(1-\frac{2a}{l}\right)\sin\varkappa\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2a}{l}\right)\mathfrak{Sin}\,\varkappa\frac{\pi}{2} - \cos\varkappa\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2a}{l}\right)\mathfrak{Cos}\,\varkappa\frac{\pi}{2}\Bigg\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C = \frac{\mathfrak{M}}{4M}\Bigg\{&(-1)^{\frac{\varkappa-1}{2}}\left[2\,\mathfrak{Cos}\,\varkappa\frac{\pi}{2} + \left[\left(1-\frac{2a}{l}\right)^2 - 1\right]\mathfrak{Cos}\,\varkappa\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2a}{l}\right)\right] + \\ &+\frac{4a^2}{l^2}\left(\cos\varkappa\frac{\pi}{2}\frac{a}{l}\mathfrak{Sin}\,\varkappa\frac{\pi}{2}\frac{a}{l} + \sin\varkappa\frac{\pi}{2}\frac{a}{l}\mathfrak{Cos}\,\varkappa\frac{\pi}{2}\frac{a}{l}\right) - \\ &-4\left(1-\frac{a}{l}\right)^2\left[\sin\varkappa\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{a}{l}\right)\mathfrak{Cos}\,\varkappa\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{a}{l}\right) + \cos\varkappa\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{a}{l}\right)\mathfrak{Sin}\,\varkappa\left(1-\frac{a}{l}\right)\right] + \\ &+2\left(1-\frac{2a}{l}\right)\sin\varkappa\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2a}{l}\right)\mathfrak{Cos}\,\varkappa\frac{\pi}{2} + \left[1-\left(1-\frac{2a}{l}\right)^2\right]\cos\varkappa\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2a}{l}\right)\mathfrak{Sin}\,\varkappa\frac{\pi}{2}\Bigg\}\end{aligned}$$

so wird

$$f\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right) = 1 - A\varkappa\frac{\pi}{2}$$

$$f'\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right) = -(-1)^{\frac{\varkappa-1}{2}}\mathfrak{Cos}\,\varkappa\frac{\pi}{2} - A - B\varkappa\frac{\pi}{2}$$

$$f''\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right) = -(-1)^{\frac{\varkappa-1}{2}}\mathfrak{Sin}\,\varkappa\frac{\pi}{2} - 2B - C\varkappa\frac{\pi}{2}$$

für $\varkappa = (3, 5, 7, \ldots)$ vereinfachen sich die Ausdrücke etwas, weil man dann $\mathfrak{Cos}\, \varkappa\alpha \frac{\pi}{2} = \mathfrak{Sin}\, \varkappa\alpha \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} e^{\varkappa\alpha \frac{\pi}{2}}$ setzen kann, wenn anders α nicht so klein ist, dass man nicht mehr $e^{-\varkappa\alpha\frac{\pi}{2}}$ gegen $e^{+\varkappa\alpha\frac{\pi}{2}}$ vernachlässigen darf.

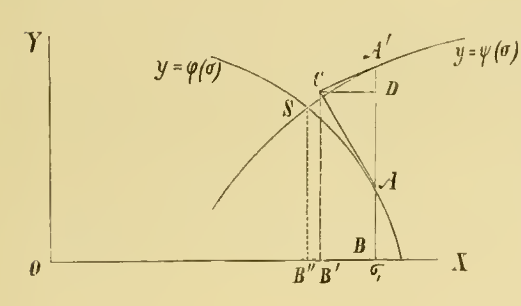
Übrigens ersieht man aus der geometrischen Bedeutung der Näherung

$$\sigma = \varkappa \frac{\pi}{2} - \frac{f\left(\varkappa \frac{\pi}{2}\right)}{f'\left(\varkappa \frac{\pi}{2}\right)}$$

dass für viele Fälle auch diese hinreichen kann. Hat man nämlich zwei Curven, deren Gleichungen $y = \varphi(\sigma)$ und $y' = \psi(\sigma)$ seien, und um ihren Durchschnittspunkt zu finden die Relation

$$f(\sigma) = \varphi(\sigma) - \psi(\sigma) = 0$$

wo bereits ein genäherter Werth dieses Durchschnittspunktes σ_1 bekannt ist, so sind die zugehörigen Ordinaten nicht dieselben für beide Curven und zwar



$$BA = y_1 = \varphi(\sigma_1) \quad ; \quad BA' = y'_1 = \psi(\sigma_1)$$

Zieht man an A und A' die sich in C schneidenden Tangenten AC und $A'C$, und fällt CD senkrecht auf $A'B$, so wird man haben

$$\frac{A'D}{CD} = \frac{\psi(\sigma_1) - CB'}{CD} = \psi'(\sigma_1)$$

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CB' - \varphi(\sigma_1)}{CD} = \varphi'(\sigma_1)$$

und wenn man addirt und CD bestimmt

$$CD = \frac{\varphi(\sigma_1) - \psi(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1) - \psi'(\sigma_1)} = \frac{f(\sigma_1)}{f'(\sigma_1)}$$

daher

$$OB' = \sigma_1 - \frac{f(\sigma_1)}{f'(\sigma_1)}$$

woraus hervorgeht, dass obige Näherung darin besteht, die Abscisse des Durchschnittspunktes der Tangenten eines S nahe gelegenen, zur selben Abscisse gehörigen Punktenpaares, für die von S selbst zu setzen. Im vorliegenden Falle, wo die Curven so rasch ansteigen, dürften, besonders für grössere Werthe von $\varkappa$ die Tangenten mit den Curvenästen nahe zusammenfallen, und für nicht sehr grosse Werthe von $\mathfrak{M}$ schon das erste Glied zur Bestimmung des ξ hinreichen.

b) Die Masse $\mathfrak{M}$ rücke jetzt bis an dass Ende des Stabes, bleibe aber noch immer von solcher Grösse und Ausdehnung, dass $\frac{\mathfrak{T}}{3T}$ und $\frac{\mathfrak{U}}{U}$ vernachlässigt werden darf, dann wird aus Gleichung 42)

$$66) \qquad 0 = \cos\sigma\, \mathfrak{Cos}\,\sigma + 1 - \frac{\mathfrak{M}}{M} \sigma \left\{ \sin\sigma\, \mathfrak{Cos}\,\sigma - \cos\sigma\, \mathfrak{Sin}\,\sigma \right\}.$$

So lange $\frac{\mathfrak{M}}{M}$ sehr klein bleibt, hat diese Gleichung eine zur Bestimmung der σ sehr günstige Form, denn setzt man, mit σ_0 eine Wurzel der Gleichung

$$67)\qquad \cos\sigma_0\,\mathfrak{Cos}\,\sigma_0 + 1 = 0$$

bezeichnend,

$$\sigma_0 = \sigma + \mu\sigma$$

wo μ jedenfalls sehr klein ist, und entwickelt 67) nach der Tailor'schen Reihe, so kommt, die Glieder mit $\mu^2\sigma^2$ bereits vernachlässigt

$$0 = \cos\sigma\,\mathfrak{Cos}\,\sigma + 1 - \mu\sigma\left\{\sin\sigma\,\mathfrak{Cos}\,\sigma - \cos\sigma\,\mathfrak{Sin}\,\sigma\right\}$$

dass man also nur $\mu = \frac{\mathfrak{M}}{M}$ zu setzen hat, und

$$\sigma = \sigma_0\frac{1}{1+\frac{\mathfrak{M}}{M}}.$$

Setzt man diesen Werth in den Ausdruck für die Schwingungsdauer:

$$\tau = \frac{2\pi l^2}{\gamma\sigma_0^2}\left(1 + \frac{\mathfrak{M}}{M}\right)^2$$

so zeigt sich, dass der Stab mit einem unbelasteten, blos in der Länge l' verschiedenen, gleiche Schwingungsdauer hat, wo

$$l' = l\left(1 + \frac{\mathfrak{M}}{M}\right).$$

Denkt man sich also statt des angehängten Gewichtes den Stab um Δl verlängert, und zwar so, dass diese Verlängerung gleiche Masse mit $\mathfrak{M}$ hat, dabei von demselben Material und Querschnitt wie der Stab, so wird obiger Gleichung genügt, denn man hat dann

$$\mathfrak{M} : M = l : \Delta l$$

$$68)\qquad \Delta l = l\,\frac{\mathfrak{M}}{M}.$$

Je grösser σ wird, desto kleiner muss $\mathfrak{M}$ sein, um diese Näherung anwenden zu können. Für grössere σ oder $\mathfrak{M}$ wird man daher einen andern Weg einschlagen müssen. Setzt man zu diesem Zwecke in 66)

$$\sigma = (2\pi+1)\frac{\pi}{2} \pm \xi$$

so erhält man zunächst

$$\mp(-1)^n \sin\xi\,\mathfrak{Cos}\,\sigma + 1 - \frac{\mathfrak{M}}{M}\sigma\left\{(-1)^n\cos\xi\,\mathfrak{Cos}\,\sigma - (\mp)(-1)^n\sin\xi\,\mathfrak{Sin}\,\sigma\right\} = 0$$

und daraus

$$69)\quad \mp\, tng\,\xi = \frac{\frac{\mathfrak{M}}{M}\left((2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)}{1+\frac{\mathfrak{M}}{M}\left((2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)\dfrac{\mathfrak{Sin}\,(2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \xi}{\mathfrak{Cof}\,(2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \xi}} - (-1)^n \frac{1}{\cos\xi\,\mathfrak{Cof}\left((2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)\left\{1+\frac{\mathfrak{M}}{M}\left((2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)\dfrac{\mathfrak{Sin}\,(2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \xi}{\mathfrak{Cof}\,(2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \xi}\right\}}$$

Die doppolten Zeichen sind aber nur für $n=0$ beizubehalten, weil nur in diesem Fall σ auch grösser als $\frac{\pi}{2}$ sein kann, denn in den übrigen Fällen ist für $\mathfrak{M}=0$, σ zu nahe gleich $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, als dass das ξ positiv ausfallen könnte, also nur die untern Zeichen zu nehmen sind.

Setzt man aber $\xi=0$ und $n=0$ in Gleichung 69) so erhält man als Bedingung

$$\frac{\mathfrak{M}}{M} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}} = 0\cdot 25573$$

für kleinere Werthe von $\frac{\mathfrak{M}}{M}$ ist also bei $n=0$, das ξ positiv, für grössere negativ. Um aus 69) das ξ zu bestimmen, wird man zwei Fälle unterscheiden.

$n=0$. Man setze als erste Näherung $\xi=0$, und hat dann wegen

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi}{2}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2}} = 1\cdot4398,\ \mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{2} = 2\cdot5009,\ \frac{\pi}{2} = 1\cdot5708$$

$$\mp\,\text{tng}\,\xi = \frac{1\cdot5708\,\frac{\mathfrak{M}}{M}}{1+1\cdot4398\,\frac{\mathfrak{M}}{M}} - \frac{1}{2\cdot5009\left(1+1\cdot4398\,\frac{\mathfrak{M}}{M}\right)};$$

mit diesen genäherten Werth geht man in den rechten Theil von 69) ein, findet ein neues ξ u. s. f., wobei man sich rasch dem wahren Werthe nähern wird.

$n=(1, 2, 3\ldots.)$ Für diesen Fall kann man sich in 69) einige Vereinfachungen erlauben, denn man findet schon für $n=1$

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,3\,\frac{\pi}{2}}{\mathfrak{Cof}\,3\,\frac{\pi}{2}} = 0\cdot99984$$

Ebenso ist der Factor $\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,(2n+1)\frac{\pi}{2}}$ für $n=1$, $0\cdot0178$, für $n=2$, $0\cdot00077$, so dass man mit steigenden n immer mehr das zweite Glied vernachlässigsn kann, und zur ersten Näherung immer setzen wird

$$70)\qquad \text{tng}\,\xi = \frac{\frac{\mathfrak{M}}{M}\left((2n+1)\frac{\pi}{2} - \xi\right)}{1+\frac{\mathfrak{M}}{M}\left((2n+1)\frac{\pi}{2} - \xi\right)}$$

Diese Formel zeigt zugleich, dass mit wachsenden n das ξ der Grenze $\frac{\pi}{4}$ zustrebt, und ein und dieselbe Masse eine um so grössere Änderung in der Schwingungsdauer hervorbringt, je grösser die Stellenzeiger der Tonhöhen werden.

c) Endlich werde von der am Ende des Stabes angebrachten Masse noch das Trägheitsmoment und Lage des Schwerpunktes berücksichtigt, dann hat man die Gleichung

$$71)\quad \cos\sigma\,\mathfrak{Cos}\,\sigma + 1 + \left(\frac{\mathfrak{M}^2\mathfrak{U}^2}{4M^2U^2} - \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{T}}{3MT}\right)\sigma^4(\cos\sigma\,\mathfrak{Cos}\,\sigma - 1) - \frac{\mathfrak{T}}{3T}\sigma^3(\sin\sigma\,\mathfrak{Cos}\,\sigma + \cos\sigma\,\mathfrak{Sin}\,\sigma) -$$
$$- \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{U}}{2MU}\sigma^2\sin\sigma\,\mathfrak{Sin}\,\sigma - \frac{\mathfrak{M}}{M}\sigma(\sin\sigma\,\mathfrak{Cos}\,\sigma - \cos\sigma\,\mathfrak{Sin}\,\sigma) = 0$$

Auch hier mögen wie oben zwei Fälle unterschieden werden.

$n = 0$.

In diesem Falle muss σ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2} + 1{\cdot}8701$ liegen, und zwar näher an Null für grosse, näher an $\frac{\pi}{2}$ für kleinere Werthe von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{U}$.

Für den ersten Fall kann man sich erlauben Gleichung 71) nach Potenzen von σ zu entwickeln, und indem man bis σ^4 vorschreitet, erhält man einen sehr bequemen Ausdruck, nämlich, indem man in 71) die nicht von σ abhängigen Coëfficienten der Reihe nach mit P, Q, R, S bezeichnet.

$$1 - \sigma^4\left(\frac{1}{12} - \frac{P}{2} + Q + \frac{R}{2} + \frac{S}{3}\right) = 0$$

und daraus

$$72)\qquad \sigma = \frac{1}{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{12} - \frac{P}{2} + Q + \frac{R}{2} + \frac{S}{3}\right)}}$$

Ist aber $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{U}$ nicht so bedeutend, so wird man zu einer der oben angeführten Näherungsmethoden seine Zuflucht nehmen. Setzt man nämlich $\sigma = \frac{\pi}{2} \pm \xi$ und zur Abkürzung

$$Q\left(\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)^3 + R\left(\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)^2 \frac{\mathfrak{Sin}\left(\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)}{\mathfrak{Cos}\left(\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)} + S\left(\frac{\pi}{2} \pm \xi\right) = G\left(\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)$$

$$1 + R\left(\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)^4 - Q\left(\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)^3 \frac{\mathfrak{Sin}\left(\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)}{\mathfrak{Cos}\left(\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)} + S\left(\frac{\pi}{2} \pm \xi\right) \frac{\mathfrak{Sin}\left(\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)}{\mathfrak{Cos}\left(\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)} = H\left(\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)$$

so findet man aus Gleichung 71)

$$73)\qquad \pm\,\mathrm{tng}\,\xi = \frac{G\left(\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)}{H\left(\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)} - \frac{1 - P\cdot\left(\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)^4}{\cos\xi\,\mathfrak{Cos}\left(\frac{\pi}{2} \pm \xi\right) H\left(\frac{\pi}{2} \pm \xi\right)}$$

wo man wieder zur ersten Näherung im rechten Theil $\xi = 0$ setzen wird. Um über die Wahl des Zeichens zu bestimmen, bemerkt man, dass für $\sigma = \frac{\pi}{2}$, oder $\xi = 0$ sein muss:

$$74)\qquad G\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1 - P\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{\mathfrak{Cos}\,\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Dieser Ausdruck, den man ohnedies zur ersten Bestimmung des ξ rechnen muss, wird für $\mathfrak{M} = 0$, $-\frac{1}{\mathfrak{Cof}\frac{\pi}{2}}$, woraus man schliesst, dass für negative Werthe von 74) das obere, für positive das untere Zeichen in 73) zu nehmen sei.

$n = (1, 2, 3 \ldots .)$ Setzt man wieder zur Abkürzung, da hier

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\sigma}{\mathfrak{Cof}\,\sigma} = 1$$

gesetzt werden darf,

$$Q\left((2\pi+1)\frac{\pi}{2}-\xi\right)^3 + R\left((2\pi+1)\frac{\pi}{2}-\xi\right)^2 + S\left((2\pi+1)\frac{\pi}{2}-\xi\right) = G'\left((2\pi+1)\frac{\pi}{2}-\xi\right)$$

$$1 + P\left((2\pi+1)\frac{\pi}{2}-\xi\right)^4 - Q\left((2\pi+1)\frac{\pi}{2}-\xi\right)^3 + S\left((2\pi+1)\frac{\pi}{2}-\xi\right) = H'\left((2\pi+1)\frac{\pi}{2}-\xi\right)$$

so findet man, wenn man $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ als erste Näherung annimmt:

$$75)\quad \operatorname{tng}\xi = \frac{G'\left((2\pi+1)\frac{\pi}{2}-\xi\right)}{H'\left((2\pi+1)\frac{\pi}{2}-\xi\right)} - (-1)^n \frac{1 - P\,.\left((2n+1)\frac{\pi}{2}-\xi\right)^4}{\cos\xi\,\mathfrak{Cof}\left((2n+1)\frac{\pi}{2}-\xi\right)H'\left((2n+1)\frac{\pi}{2}-\xi\right)}$$

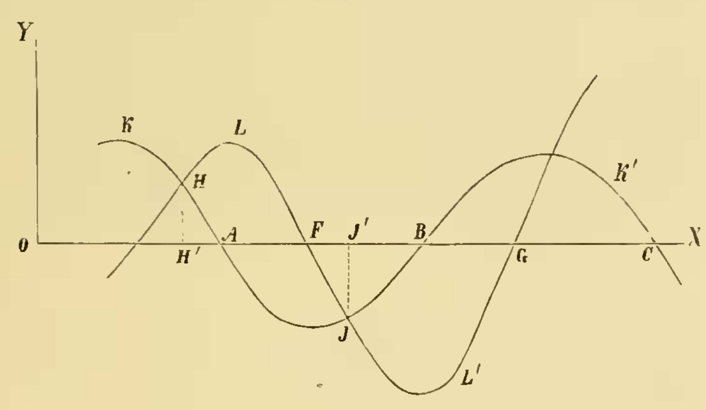
Für Werthe die sich zu weit von $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ entfernen, wird jedoch diese Formel nicht hinreichen, man hat daher noch zu untersuchen, welches in den äussersten Fall die untere Grenze, bis zu welcher die σ für gewisse $\mathfrak{M}$ kommen können, sein wird. Dafür genügt es solche Werthe von σ zu betrachten, für welche $\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\sigma}$ gegen die andern Glieder vernachlässigt werden kann, und es schreibt sich dann Gl. 71)

$$76)\quad \cos\sigma - \left\{-P\sigma^4\cos\sigma + Q\sigma^3(\sin\sigma+\cos\sigma) + R\sigma^2\sin\sigma + S\sigma(\sin\sigma-\cos\sigma)\right\} = 0$$

woraus man weiter findet, den Theil in den Klammern für sich gleich Null gesetzt:

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{P\sigma^3 - Q\sigma^2 + S}{Q\sigma^2 + R\sigma + S}$$

welche Gleichung die Durchschnittspunkte der durch den in Klammern stehenden Theil dargestellten Curve mit der Abscissenmasse bestimmt. Es seien F, G diese Punkte, und L, L' die entsprechende Curve, ferner KK' ein Theil der Curve, die der Gleichung $y = \cos\sigma$ angehört, und daher A, B, C Punkte, deren Abscissen mit den Wurzelwerthen bei unbelastetem Stab zusammenfallen, die der Punkte $H, J \ldots$ aber der Gl. 71) genügen.



Der rechte Theil von 72) wird ∞ für $\sigma = \infty$, und daher kommt mit wachsenden σ dieses einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ immer näher, oder die Punkte F, G rücken an die Punkte A, B, je weiter man von O aus nach rechts fortgeht.

Bei denselben Stellenzeigern der Tonhöhe kann also durch das Anbringen der Masse $\mathfrak{M}$ das zugehörige σ sich um π im äussersten Falle von dem für $\mathfrak{M} = 0$ unter-

scheiden. Man könnte zwar einwenden, dass diese Differenz eben so gut 2π, 3π... sein könnte, da auch dann tng σ dem Unendlichen zustreben müsste; allein dies würde erfordern, dass $\operatorname{tng}\sigma = \operatorname{tng}\left((2n+1)\frac{\pi}{2} - \xi\right)$ für einen endlichen Werth von n unendlich würde, und zwar ein-, zwei-, dreimal u. s. f., was nicht möglich ist, da der Nenner in 72) als wesentlich positiv nicht Null werden kann.

Lässt man jetzt $\mathfrak{M}$ und somit auch $\mathfrak{T}$ unendlich wachsen, während $\mathfrak{U}$ endlich bleiben muss, da sonst bei so ungleichförmiger Massenvertheilung die Gleichungen 15) und 16) nicht mehr gelten könnten, so sieht man, dass weil P ein Unendliches der zweiten Ordnung wird, auch tng $\sigma = \infty$ zur Grenze hat. Es rückt also auch in diesem Fall F und G immer näher an A und B, aber nie über diese Punkte hinaus, so dass die Wurzelwerthe von 71) sich von denen der Gl. 67) nie um mehr als π bei denselben Stellenzeigern unterscheiden können.

Wäre $P = 0$, so wäre für $\sigma = \infty$ die Grenze von tng σ die negative Einheit, die σ selbst würden sich also fortwährend $(2(2n)+3)\frac{\pi}{4}$ nähern, und durch das Anbringen von $\mathfrak{M}$ das σ sich höchstens um $3\frac{\pi}{4}$ verringern können.

Für sehr grosse $\mathfrak{M}$ wird man nach Allem diesem für 75) schreiben müssen, wenn wieder $(n+1)$ den Stellenzeiger der Tonhöhe bezeichnet,

$$77)\qquad \operatorname{tng}\xi = \frac{G'\left((2n-1)\frac{\pi}{2}+\xi\right)}{H'\left((2n-1)\frac{h}{2}+\xi\right)} - (-1)^n \frac{1 - P\,.\left((2n-1)\frac{\pi}{2}+\xi\right)^4}{\cos\xi\,\mathfrak{Cos}\left((2n-1)\frac{\pi}{2}+\xi\right)H'\left((2n-1)\frac{\pi}{2}+\xi\right)}$$

Liegt endlich σ in der Mitte zwischen $(2n-1)\frac{\pi}{2}$ und $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, so hat man die Gleichung:

$$78)\qquad \mp\operatorname{tng}\xi = \frac{H'\left(2n\frac{\pi}{2}\pm\xi\right)}{G'\left(2n\frac{\pi}{2}\pm\xi\right)} - (-1)^n \frac{1-P.\left(2n\frac{\pi}{2}\pm\xi\right)^4}{\cos\xi\,\mathfrak{Cos}\left(2n\frac{\pi}{2}\pm\xi\right)G'\left(2n\frac{\pi}{2}\pm\xi\right)}$$

welche sich leicht aus 71) ableitet, und man erkennt einen solchen Werth von σ, wenn man sieht, dass $\xi = 0$ gesetzt

$$H'\left(2n\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^n \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,2n\frac{\pi}{2}}\left[1-P\,.\left(2n\frac{\pi}{2}\right)^4\right]$$

einen kleinen Werth annimmt. Zugleich orientirt man sich bezüglich des doppelten Zeichens, denn ist dieser Ausdruck negativ, so ist das obere, ist er aber positiv, das untere Zeichen zu nehmen.

Man kann noch einen für alle drei Fälle gemeinsamen Weg angeben, der hier angedeutet werden mag, um die entsprechende transscendente Gleichung aufzulösen. Für diese lässt sich nämlich die Entwickelung machen:

$$0 = \frac{f\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)}{f'\left(\varkappa\frac{\pi}{\pi}\right)} + \xi + \frac{\xi^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{f''\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)}{f'\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{\xi^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{f'''\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)}{f\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)} + \cdots$$

Es ist aber:

$$\frac{\xi^2}{1\cdot 2} f''\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\xi^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right) + \ldots = f(\sigma) - f\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right) - \xi f'\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right) = \psi(\xi)$$

und daher:

$$-\frac{f\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)}{f'\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)} = \xi + \frac{1}{f'\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)}\psi(\xi);$$

wendet man auf diese Gleichung die Formel des Lagrange an, indem man setzt:

$$-\frac{f\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)}{f'\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)} = \eta$$

so findet man:

$$\xi = \eta - \frac{1}{f'\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)}\psi(\eta) + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{1}{f'\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)}\frac{d}{d\eta}\cdot\left(\psi(\eta)\right)^2 + \ldots$$

wobei man hat:

$$\psi(\eta) = f\left(\varkappa\frac{\pi}{2}+\eta\right);\ 2\psi(\eta)\psi'(\eta) = 2f\left(\varkappa\frac{\pi}{2}+\eta\right)\left\{f\left(\varkappa\frac{\pi}{2}+\eta\right) - f\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)\right\}; \ldots$$

Diese Reihe wird um so tauglicher, je grösser $f'\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)$ ist, was immer für grosse n und $\mathfrak{M}$ eintritt. Man darf aber nicht vergessen, dass wenn auch in $f\left(\varkappa\frac{\pi}{2}+\eta\right) = 0$ mit einen ziemlich genäherten Werth von σ eingegangen wird, wegen des ungemein raschen Ansteigens der Ordinaten der durch $y = f(\sigma)$ vorgestellten Curve, dennoch obige Function einen bedeutenden Werth erreichen kann, was den Vortheil eines grossen $f'\left(\varkappa\frac{\pi}{2}\right)$ bedeutend verringert.

Die Kenntniss des σ ermöglicht jetzt, auch die übrigen, den Zustand des Stabes bestimmenden Gleichungen näher zu untersuchen. Ausser der Lage der Knotenpunkte ist aber alles andere von den Anfangszuständen abhängig, und es soll daher nur von jener etwas Allgemeines bemerkt werden. Um sie jedoch mit der am unbelasteten Stabe vergleichen zu können, mag zuerst dieser Fall näher betrachtet werden.

Setzt man in Gl. 61) $X = 0$, und bemerkt, dass schon für $\sigma = sl = 3\frac{\pi}{2}$ kommt:

$$\sin\sigma + \mathfrak{Sin}\,\sigma = 54\cdot 65 \quad , \quad \cos\sigma + \mathfrak{Cos}\,\sigma = 55\cdot 66$$

und das Verhältniss 1·02, dass es sich also mit wachsenden σ immer mehr der Einheit nähert, so kann man angenähert setzen:

$$79)\qquad \cos\sigma\frac{x}{l} - \sin\sigma\frac{x}{l} = e^{-\sigma\frac{x}{l}}$$

Man sieht schon im Vorhinein, dass die Wurzeln dieser Gleichung sehr nahe

$$0,\quad 5\frac{\pi}{4},\quad 9\frac{\pi}{4},\quad 13\frac{\pi}{4},\ldots.$$

sein werden. Fig. 1, Taf. I versinnlicht den Gang der Curven, deren Gleichungen sind:

$$\eta = \cos \xi - \sin \xi \quad , \quad \eta' = e^{-\xi'}$$

im richtigen Verhältniss dargestellt. Nennt man dann $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \ldots$ die aufeinanderfolgenden Abscissen der Durchschnittspunkte, so erhält man die entsprechenden Entfernungen der Knoten vom fixen Ende des Stabes aus:

$$x_n = l \cdot \frac{\xi_n}{\sigma}$$

Trägt man also von A aus $AB = \sigma = \left[3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, 7\frac{\pi}{2} \ldots\right]$ auf, und errichtet in B senkrecht auf AB, $BC = l$, zieht die Gerade AC, so stellen die Ordinaten $\xi_1 x_1$, $\xi_2 x_2$, $\xi_3 x_3 \ldots$ die Entfernungen der Knoten vom fixen Ende vor, wobei natürlich $A\xi_n$ nicht grösser als AB sein darf.

Wird aus irgend einem Grunde das σ kleiner als oben angenommen, ohne dass die Gleichung 79) aufhört zu gelten, so hat dieses, wie man aus der angeführten Construction ersieht, eine Annäherung der Knoten gegen das freie Ende des Stabes zur Folge, und zwar beträgt die Differenz im Allgemeinen, wenn $\Delta\sigma = \sigma - \sigma'$ ist:

$$\Delta\xi_n = \Delta\sigma \cdot \frac{\xi_n}{l}$$

Dieser Fall findet aber in der That sehr nahe statt bei Stäben, deren Schwingungsdauer durch angehängte Gewichte vergrössert wird, wie sogleich gezeigt werden soll.

Für die unter b) gemachten Voraussetzungen, als die einfachsten, erhält man aus 43) und 44)

$$G = 2\,(\cos sl + \mathfrak{Cos}\, sl) \quad , \quad G' = 2\,(\sin sl + \mathfrak{Sin}\, sl).$$

Die entsprechende Gleichung unterscheidet sich also von 61) nur in den Werthen von s oder σ, und obwohl diese hier kleiner sind als oben, so begeht man doch keinen solchen Fehler, wenn man $G = G'$ setzt, um nicht auch hier, selbst für den kleinsten Werth von σ, die Wurzeln von 79) als genähert annehmen zu können. Da ferner hier $\Delta\sigma$ nie grösser als $\frac{\pi}{4}$ wird, so sieht man, dass der Stab, ob belastet oder nicht, für Tonhöhen mit denselben Stellenzeigern auch dieselbe Anzahl Knotenpunkte beibehält, die jedoch mit zunehmenden $\mathfrak{M}$ dem freien Ende des Stabes immer näher rücken, so dass für $\mathfrak{M} = \infty$ der letzte ganz in dasselbe fällt.

Die zu c) gehörigen Werthe von G, nämlich:

$$G = 2\,(\cos sl + \mathfrak{Cos}\, sl) + 2\, s^2 \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{U}}{\partial\varphi} (\cos sl - \mathfrak{Cos}\, sl) - 2\, \frac{s^3\mathfrak{T}}{\partial\varphi} (\sin sl + \mathfrak{Sin}\, sl)$$

$$G' = 2\,(\sin sl + \mathfrak{Sin}\, sl) + 2\, s^2 \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{U}}{\partial\varphi} (\cos sl - \mathfrak{Cos}\, sl) - 2\, \frac{s^3\mathfrak{T}}{\partial\varphi} (\cos sl - \mathfrak{Cos}\, sl)$$

zeigen, dass man auch hier für hinreichend grosse sl, $G = G'$ setzen kann, nur wird dieses für den zweiten Wurzelwerth σ ungenauer als in dem vorhergehenden Fall, und um so mehr,

je grösser $\mathfrak{M}$ wird. In c) wurde aber gezeigt, dass für Tonhöhen von gleichen Stellenzeigern $\Delta\sigma$ zur Grenze π hat, mithin der Punkt B durch das Belasten um mehr als $\frac{\pi}{4}$ gegen A hin verschoben wird, oder was dasselbe ist, ein Knoten ganz von dem Stabe verschwindet. Es ist also hier der Fall möglich, dass ein Stab ausser bei seinem tiefsten Ton auch bei seinem nächst höheren noch ohne Knoten schwingt, und überhaupt die Anzahl der Knoten nicht mehr durch $n-1$ gegeben ist, wenn n den Stellenzeiger der Tonhöhe bezeichnet, sondern mit Ausnahme von $n=1$ durch $n-2$.

In dem Fall a) hat man den obern und untern Theil des Stabes zu unterscheiden. Da jedoch a in 43) und 44) nur ein Bruchtheil von l sein wird, so kann hier in Bezug auf die Zulässigkeit $G=G'$ zu setzen, was für grosse σ erlaubt sein wird, für den Fall von $\sigma=3\frac{\pi}{2}=\xi$ ein Bedenken entstehen, sobald a nicht sehr klein wird. Es ist daher gut, die folgende Betrachtung vorauszuschicken.

Setzt man in 53) $\frac{G}{G'} = 1 + \delta$, wo δ positiv oder negativ sein kann, so ist:

$$\cos\xi - \sin\xi - e^{-\xi} - \delta(\sin\xi - \mathfrak{Sin}\,\xi) = 0.$$

Indem man also $G = G'$ setzt, nimmt man statt der Abscisse des Durchschnittspunktes der Curve

$$\eta = -G(\sin\xi - \mathfrak{Sin}\,\xi) + G'(\cos\xi + \mathfrak{Cof}\,\xi)$$

diejenige, die zur Ordinate $\eta' = \delta(\sin\xi' - \mathfrak{Sin}\,\xi')$ gehört, wo ξ' der Gleichung 79) genügt. Aber es ist:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -G(\cos\xi - \mathfrak{Cof}\,\xi) - G'(\sin\xi + \mathfrak{Sin}\,\xi)$$

für $\xi = \xi'$ immer gross, da für $G = G'$ das Glied mit $e^{\xi'}$ nicht verschwindet, und daher die Entfernung des Durchschnittspunktes der an $(\xi'\eta')$ gezogenen Tangente mit der Abscissenaxe, von ξ' oder:

$$\frac{\eta'}{\frac{d\eta'}{d\xi'}}$$

um so kleiner, woraus man schliesst, dass der wahre Durchschnittspunkt von ξ' nicht sehr entfernt sein kann, und eine Näherung selbst für nicht sehr kleine δ möglich ist, wenn man $G = G'$ setzt.

Auch für den obern Theil gilt dieses, denn für Ω und Ω' sieht man sogleich ein, dass man setzen darf:

$$\Omega = -\Omega'$$

Für Γ und Γ' bemerke man, dass wegen $G = G'$, und wie man aus Gleichung 36) sieht mit demselben Rechte wegen

$$\alpha = \alpha' \quad , \quad \beta = \beta'$$

die in 46) und 47) mit $\cos sa$ und $\sin sa$ multiplicirten Glieder, die eine Gleichsetzung von

$$\Gamma = -\Gamma'$$

nicht erlaubt hätten, jedenfalls sehr klein werden, und man sieht demnach, dass auch in diesem Fall durch das Belasten ein Verschieben der Knoten gegen das freie Ende hin hervorgebracht wird, wenn auch die Grösse dieser Verschiebung durch die angewandte Construction nicht in allen Fällen mit hinreichender Genauigkeit erhalten werden wird.

Nur bei kleinen $\frac{a}{l}$ mag noch eine Bemerkung gemacht werden, in diesem Falle wird, da $\alpha = \alpha' = 0$, β und β' aber einen gewissen Werth beibehalten, die grösste Differenz in Γ und Γ' eintreten. Nimmt man noch immer $\Omega = -\Omega'$, so erhält man aus 54)

$$K' \cos \sigma \frac{\xi}{l} - K \sin \sigma \frac{\xi}{l} = e^{-\sigma \frac{\xi}{l}},$$

wo

$$K' = \frac{\Gamma'}{\Omega}, \qquad K = -\frac{\Gamma}{\Omega}.$$

Die eine Curve in Fig. 1, Taf. I wird also eine andere werden, und die Durchschnittspunkte mit der Abscissenaxe werden für $K > K'$ näher an A rücken, und daher auch die Punkte $\xi_1\ \xi_2 \ldots$ Ist nun die Vergrösserung der Schwingungsdauer, oder die Verminderung des σ kleiner als diese Verschiebung der $\xi_1\ \xi_2 \ldots$ so e r f o l g t i m o b e r n T h e i l d e s S t a b e s e i n e V e r s c h i e b u n g d e r K n o t e n g e g e n d i e M a s s e $\mathfrak{M}$, a l s o g e r a d e e n t g e g e n g e s e t z t d e n f r ü h e r e n F ä l l e n. Es muss dann $\Gamma > \Gamma'$ sein. Betrachtet man aber die Werthe von G, G', Γ, Γ' so tritt dieses ein wenn $\cos \sigma \frac{a}{l}$ positiv und $\cos \sigma \frac{a}{l} > \sin \sigma \frac{a}{l}$, oder auch wenn sowohl $\cos \sigma \frac{a}{l}$ als auch $\sin \sigma \frac{a}{l}$ negativ sind und $\sin \sigma \frac{a}{l} > \cos \sigma \frac{a}{l}$. Für kleine a würde daher dieser Fall immer eintreten, da dann noch $\mathrm{Cos}\, \sigma \frac{a}{l} > \mathrm{Sin}\, \sigma \frac{a}{l}$ ist, der Werth des σ aber sich sehr wenig ändert.

In den Vorhergehenden bemerkt man die Anwendung der gemachten Untersuchungen auf einen Fall, der in der Akustik häufig berührt wird. In b) wurde angenommen $\mathfrak{T} = 0$, $\mathfrak{U} = 0$, dieses ist streng genommen in Bezug auf $\mathfrak{T} = 0$ nie zu realisiren, nur für $\mathfrak{M} = \infty$ kann man auf andere Weise als durch Anbringen einer Masse dieser Bedingung genügen. In der That muss eine unendliche Masse durch die den Stab bewegenden Kräfte in Ruhe bleiben, und daher gleichbedeutend sein mit einer Fixirung des freien Endes, jedoch so, dass es noch den übrigen Bedingungen genügen kann, d. h. die Tangente an demselben keine unveränderliche Lage behält. Man würde dieses durch eine Drehungsaxe senkrecht auf die Schwingungsebene oder durch Anstemmen des freien Endes an eine fixe Widerlage erreichen. Jetzt ist aber auch die angehängte Masse als in einen Punkt concentrirt zu betrachten, und somit obigen Bedingungen genügt. Das in a) von den Grenzlagen der zweiten Curve Gesagte, dass sie nämlich in unter sich parallele, auf der Abscissenaxe senkrechte Gerade übergeht, die diese in den Entfernungen $0,\ 5\frac{\pi}{4},\ 9\frac{\pi}{4},\ 13\frac{\pi}{4} \ldots$ schneidet, zeigt aber, dass sich die Tonhöhen eines solchen Stabes, übereinstimmend mit den bekannten Thatsachen, wie die Quadrate von

$$0, \quad \frac{5}{4l}, \quad \frac{9}{4l}, \quad \frac{13}{4l}, \ldots$$

verhalten. Dieselbe Übereinstimmung ergibt sich in der Lage der Knotenpunkte.

II. Experimentelle Bestätigung der entwickelten Relationen.

Es wird nicht überflüssig sein einige Versuche anzuführen, die eine Bestätigung der im vorhergehenden Abschnitt aufgestellten Thatsachen ermöglichen, nicht sowohl um die Richtigkeit der gemachten Voraussetzungen darzuthun, als vielmehr über die eingeführten Näherungen, die durch die Complication des gestellten Problems nothwendig wurden, sich einige Beruhigung zu verschaffen. Es wird dabei vor Allem die Abhängigkeit der Schwingungsdauer eine nähere Untersuchung bedürfen. und es wäre nur noch nöthig sich über ein Mittel zu entscheiden, diese schnell und ohne zu grosse Umständlichkeiten zu bestimmen. Die directe Vergleichung der Tonhöhen hat immer seine Schwierigkeiten, kann auch bei der Belastung seinen Dienst ganz versagen, wenn die Schwingungsdauer zu gross wird. Auch die graphische Methode wird man gern umgehen, wenn man für sie eine andere, wenigstens für diese Fälle bequeme und empfindliche Art der Beobachtung substituiren kann. Es möge daher erlaubt sein, den eingeschlagenen Weg näher zu beleuchten.

Bekanntlich hat in neuester Zeit Lissajous auf eine sehr sinnreiche Weise die Interferenz zweier senkrecht auf einander polarisirten Schwingungen von verschiedener Schwingungsdauer studirt, indem er von zwei Stimmgabeln, die in auf einander senkrechten Ebenen oscillirten, und an ihren zugekehrten Seiten zwei Spiegel trugen, einen leuchtenden Punkt reflectiren liess, dessen Bild sodann die entsprechende Interferenzcurve beschrieb und diese als leuchtende Linie sichtbar machte. Um möglichst viele Fälle zu umfassen, benöthigt man jedoch eine bedeutende Sammlung von Stimmgabeln, und wird überhaupt eine sehr sorgfältige Aufstellung erfordert. Man kann jedoch auf eine weit einfachere Art zum Ziele gelangen, wobei freilich der Vortheil, den entsprechenden Combinationston zu hören, in manchen Fällen wegfallen wird. Setzt man in Gleichung 56), was immer erlaubt ist,

$$XE = A\cos\varphi \quad , \quad XE' = A\sin\varphi,$$

so wird

$$y = A\sin(\gamma s^2 t + \varphi) \tag{80}$$

oder, wenn T die Schwingungsdauer, und $\varphi = \frac{2\pi\Delta}{T}$ gesetzt wird, auch

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}(t + \Delta)\right). \tag{81}$$

Was also die Anfangsbedingungen sein mögen, immer lässt sich die Abweichung eines Theilchens von der Gleichgewichtslage durch eine Gleichung von der Form wie 81) darstellen. Es sei nun die Gleichgewichtslage eines Theilchens zugleich O der Ursprung der Coordinaten, und auf dasselbe wirken die Kräfte nach den Axen x und y, die denselben eine Schwingung von der Dauer T_x und T_y mittheilen. Die Curve, die dieses Theilchen beschreibt, wird dann bekanntlich erhalten, wenn man aus den Gleichungen

$$x = A\sin\frac{2\pi}{T_x}(t + \Delta), \qquad y = B\sin\frac{2\pi}{T_y}(t + \Delta'),$$

die Zeit t eliminirt.

Bewegt man eine auf Ox senkrechte Gerade so, dass ihre Durchschnitte mit Ox den Werthen von x, und eine zweite senkrecht auf Oy, so dass die Werthe von y ihre Durch-

schnittspunkte bestimmen für jedes t, so ist der Durchschnittspunkt dieser Geraden die Lage des Beweglichen zur Zeit t, und seine Bewegung ist die des schwingenden Theilchens. Diese beiden Geraden sind in dem Versuche von Lissajous nichts anderes als die Durchschnitte von Ebenen, die man sich senkrecht auf die beiden Spiegel- und Oscillationsebenen gelegt denkt, mit einer vor das Auge gehaltenen auffangenden Ebene. Bei den hier anzuführenden Versuchen wurden die Curven auf andere Art erhalten.

a) Man nehme zwei an ihrem untern Ende eingeklemmte Stäbe und befestige an ihren freien Enden kleine Schirme, in welchen zwei feine Spalten eingeschnitten sind, so gestellt, dass diese senkrecht auf einander stehen. Bringt man beide Stäbe in Schwingungen, so dass auf jedem Stab nur eine Schwingungsart vorkömmt, so kann man, wie sie auch beschaffen sein mag, diese immer in zwei Componenten zerlegt denken, wovon die eine senkrecht auf der Spalte steht. Die Spalten sind daher für diese Componenten nichts anderes, als die oben erwähnten Geraden, und sieht man von oben durch dieselben nach einer gut beleuchteten Fläche, entweder mit freiem Auge oder mit einer Loupe, so erscheint der Durchschnittspunkt hell auf dunklem Grunde und zeigt beim Oscilliren der Stäbe die entsprechende Oscillationscurve.

Die zu den Spalten parallelen Componenten haben natürlich auf die Lage ihres Durchschnittspunktes keinen Einfluss, allein bei messenden Versuchen wird man immer gut thun, die Stäbe so breit zu nehmen, dass sie geradlinig schwingen und die Spalten senkrecht auf die Schwingungsebenen anzubringen (Fig. 2, Taf. I).

Um den Einfluss der Belastung bei constanter Länge zu studiren, ist diese Methode sehr geeignet, allein um eine Veränderung von T durch Verkürzen eines Stabes hervorzubringen, wird sie wenig Spielraum darbieten, da das Abnehmen der Amplituden bald sehr stören wird. Für solche Fälle kann man sich anders helfen und zugleich eine bequeme Art erhalten, Schwerpunkt und Trägheitsmoment der angehängten Masse zu berücksichtigen.

b) An einem Stab von hinreichender Breite wird (Fig. 3, Taf. I) durch eine Klemmvorrichtung ein Metallstück $\mathfrak{M}$ befestigt, welches nach aufwärts gerichtet den zweiten Stab $\mathfrak{M}S$ trägt, so dass die Breitendimensionen dieser beiden Stäbe auf einander senkrecht stehen. An dem obern Ende dieses letztern befindet sich ein kleiner hellpolirter Knopf K. Nach unten zu ist an $\mathfrak{M}$ eine Verlängerung angebracht, die das Laufgewicht Q trägt. Bringt man beide Stäbe aus ihrer Gleichgewichtslage, so ist leicht einzusehen, dass K die zu ihren Schwingungsdauern gehörige Interferenzcurve beschreibt, denn dieser Punkt befindet sich in der That zur Zeit t in beiden oben angeführten Geraden, somit in ihren Durchschnittspunkt. Die Curven selbst werden durch den in K entstehenden Lichtpunkt wie beim Kaleidophon sichtbar. Verkürzt man auch den untern Stab bedeutend, so bleiben doch die von ihm herrührenden Amplituden gross genug, weil die Winkelbewegung der Tangente an $\mathfrak{M}$ durch den Arm $\mathfrak{M}S$ hinreichend sichtbar wird.

Obwohl der obere Stab, der einen Theil der Belastung des untern ausmacht, bei seiner Bewegung die Gestalt verändert, wird man nichts desto weniger ohne Bedenken $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{T}$ der angehängten Masse als constant annehmen können. Diese Vorrichtung lässt sich umgekehrt sehr gut benützen die Interferenzcurven darzustellen, da man im Stande ist die Schwingungsdauer des untern Stabes für jede Länge zu berechnen. Auch geben diese Methoden, da die einfachste Schwingung ohne Knoten am leichtesten hervorzubringen ist, Gelegenheit die aufgestellten Formeln gerade für den ungünstigsten Fall zu untersuchen.

Bevor man jedoch zu den Versuchen selbst übergeht, muss man die Abhängigkeit der Gestalt der Interferenzcurven von den Schwingungsdauern T_x und T_y kennen. Es ist dabei nur nothwendig, gewisse Stücke an ihnen zu beobachten um sofort $\frac{T_x}{T_y}$ zu finden, wie sich aus einer Analyse ihrer allgemeinen Gleichung ergibt, und überdies ist die graphische Darstellung so einfach, dass man für die vorzüglichsten Fälle eine Tafel geben kann. Dieses ist in der That von Lissajous geleistet worden, vielleicht auch eine Discussion dieser Curven, allein es standen keine Mittel zu Gebote etwas Näheres darüber zu erfahren, daher es entschuldigt werden möge, wenn hier eine vielleicht weniger vollständige Darstellung einiger besonders nützlichen Eigenschaften versucht wird.

Da der Zeitpunkt, von welchem an t gezählt wird, willkürlich bleibt, so kann man für die beiden Componenten setzen:

$$x = a \sin 2\pi \frac{t}{T_x}, \qquad y = b \sin 2\pi \frac{t+\Delta}{T_y} \tag{82}$$

Lässt man die Zeit sich continuirlich ändern, so wird das Bewegliche seine Bahn durchlaufen und möglicherweise wieder zum Ausgangspunkt zurückkehren. Die Zeit T nach welcher dieses geschieht, oder die Schwingungsdauer der resultirenden Bewegung muss so beschaffen sein, dass sowohl in 82) als auch in den Ausdrücken für die Componenten der Geschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\pi a}{T_x} \cos 2\pi \frac{t}{T_x}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi b}{T_y} \cos 2\pi \frac{t+\Delta}{T_y} \tag{83}$$

durch Substitution von

$$t + T$$

an die Stelle von t nichts geändert wird, daher man haben muss, wenn A und B ganze Zahlen bedeuten,

$$T = A\, T_x = B\, T_y$$

oder

$$\frac{T_x}{T_y} = \frac{B}{A}$$

1. Da nun A und B die kleinsten Zahlen sein müssen, die dieser Bedingung genügen, so werden sie erhalten, wenn man $\frac{T_x}{T_y}$ auf die kleinste Benennung bringt, so dass A und B relative Primzahlen bedeuten. Ist aber T_x oder T_y incommensurabel, oder lässt sich $\frac{T_x}{T_y}$ durch Abkürzen nicht auf einen Bruch bringen, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, so gibt es für diese Fälle keinen angebbaren Werth von T, und das Bewegliche durchläuft keine geschlossene Curve.

Eliminirt man aus 82) das t, so ist die Gleichung der Curven

$$2\pi\Delta = T_y \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{y}{b}\right) - T_x \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right). \tag{84a}$$

Heissen ξ und η die kleinsten Bogen die zu den Sinussen $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{b}$ gehören so kann man für die Bogen nicht nur $\xi + \alpha . 2\pi$, $\eta + \beta . 2\pi$ sondern auch $-\xi + \alpha' . 2\pi \pm \pi$, $-\eta + \beta' . 2\pi \pm \pi$

setzen, und hat daher, je nachdem man 84_a) nach x oder y auflöst, $T_x = Bm$, $T_y = Am$ setzt, die folgenden Doppelgleichungen

$$85_b) \quad \begin{aligned} &R)\ x = a \sin\left\{\frac{A}{B}\eta - \frac{2\pi\Delta}{mB} + \beta . \frac{A}{B} . 2\pi\right\},\ \ y = b \sin\left\{\frac{B}{A}\xi + \frac{2\pi\Delta}{mA} + \alpha\frac{B}{A}2\pi\right\} \\ &R')\ x = a \sin\left\{-\frac{A}{B}\eta - \frac{2\pi\Delta}{mB} + \beta'\frac{A}{B} . 2\pi \pm \frac{A}{B}\pi\right\} . y = b \sin\left\{-\frac{B}{A}\xi + \frac{2\pi\Delta}{mA} + \alpha'\frac{B}{A}2\pi \pm \frac{B}{A}\pi\right\} \end{aligned}$$

wo das untere Zeichen für negative ξ oder η zu nehmen ist.

Will man alle möglichen y, die einem bestimmten x entsprechen, erhalten, so braucht man nur für α und α' alle möglichen Werthe zu setzen, diese sind aber nur von 0 bis $A - 1$ zu nehmen, denn für grössere Werthe kehren sowohl dieselben y als auch $\frac{dy}{dt}$ wieder. Dasselbe gilt von x bezüglich $B - 1$ und man schliesst:

2. Eine auf Ox Senkrechte wird von der Curve im Allgemeinen $2A$ mal, eine auf Oy Senkrechte aber $2B$ mal geschnitten. Ist das Verhältniss $\frac{T_x}{T_y}$ nicht durch ganze Zahlen ausdrückbar, so wird die Zahl der Durchschnittspunkte unendlich gross.

Die Curven ändern sich mit dem Δ; kömmt man jedoch bei einem gewissen Δ an, so kehren die Curven in derselben Ordnung wieder. Um dieses Intervall zu bestimmen, innerhalb welchen man Δ zu variiren hat, um alle möglichen zu T_x und T_y gehörigen Curven zu umfassen, betrachte man die Gleichungen 82). Setzt man hier $\Delta' = \Delta + \delta$, so werden wohl für dasselbe t andere x und y folgen, allein wenn nur von einer gewissen Zeit $t + \tau$ an, sowohl die x und y als auch die Geschwindigkeitscomponenten identisch mit denen von $\delta = 0$ werden, so sind die beiden Curven selbst identisch. Dazu ist aber erforderlich, wenn γ_x und γ_y ganze Zahlen sind, dass man hat

$$\tau = \gamma_x T_x \quad . \quad \tau + \delta = \gamma_y T_y$$

woraus folgt

$$\delta = \gamma_y T_y - \gamma_x T_x$$

und

$$\frac{\delta}{m} = \gamma_y A - \gamma_x B$$

denn man will ja den kleinsten Werth von δ, der obigen Bedingungen genügt. Da der rechte Theil nur eine ganze Zahl sein kann, so muss es auch der linke, woraus man schliesst

$$\delta = m, \quad 1 = \gamma_y A - \gamma_x B$$

3. Um alle möglichen zu T_x und T_y gehörenden Curven zu erhalten, braucht man Δ nur zwischen den Grenzen $\Delta = 0$ und $\Delta = m$ sich ändern zu lassen, und da Δ immer als ein Bruchtheil von m erscheint, so ist die Form der Curven nur von A und B, nicht aber von T_x und T_y selbst abhängig.

Setzt man das erste Differentiale von y und x der Nulle gleich, so erhält man die Maxima oder Minima für die einzelnen Curvenäste, u. z. B. für y die Gleichung

$$0 = b \cos\left\{\frac{B}{A} . \text{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right) + \frac{2\pi\Delta}{mA}\right\}\frac{B}{A}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = b . \cos\left\{\text{arc}\left(\sin = \frac{y}{b}\right)\right\}\frac{B}{A}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

Diese Gleichung ist nur für $y = \pm\, b$ erfüllt, und setzt man $\eta = \pm\, \frac{\pi}{2}$ in den Ausdruck für x in 84_b), so zeigt sich, dass aus R und R', die gleichen Werthen von η und β entsprechenden x zusammenfallen, mithin nur $2\,B$ verschiedene x für $y = \pm\, b$ sein können.

4. Construirt man sich um O als Mittelpunkt ein Rechteck, dessen Seiten parallel zu Ox und Oy bezüglich die Längen $2\,a$ und $2\,b$ haben, so bleibt die Curve innerhalb dieses Rechteckes eingeschlossen, alle mit Ox und Oy parallelen Tangenten fallen mit den Rechteckseiten zusammen, die von der Curve im ganzen $2\,A + 2\,B$ mal, jede einzelne aber, und zwar von denen zu Ox parallelen B mal, von denen zu Oy parallelen aber A mal tangirt werden.

Nennt man y_1 und y_2 zwei zu demselben x gehörige y, und macht die Summe, so wird, indem man diese y blos aus R oder R' genommen denkt,

$$R)\;\; y_1 + y_2 = 2b \sin\left\{\frac{B}{A}\xi + \frac{2\pi\omega}{A} + (\alpha_1 + \alpha_2)\frac{B}{A}\pi\right\} \cos\left\{(\alpha_1 - \alpha_2)\frac{B}{A}\pi\right\}$$

$$R')\;\; y'_1 + y'_2 = 2b \sin\left\{-\frac{B}{A}(\xi \mp \pi) + \frac{2\pi\omega}{A} + (\alpha'_1 + \alpha'_2)\frac{B}{A}\pi\right\} \cos\left\{(\alpha'_1 - \alpha'_2)\frac{B}{A}\pi\right\}$$

wo $\Delta = m\omega$ gesetzt ist, so dass ω einen echten Bruch bezeichnet. Jede dieser Summen wird unabhängig von ξ und Δ Null, wenn $(\alpha_1 - \alpha_2)\frac{B}{A}\pi$ ein ungerades Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ ist. Dazu wird aber erfordert, dass A gerade sei, denn dann kann man α_1 und α_2 so wählen, dass sie sich nur um $\frac{A}{2}$ unterscheiden, d. h. zu gleicher Zeit setzen:
$\alpha_1 = \left(1, 2, 3 \ldots \frac{A}{2} - 1\right)$, $\alpha_2 = \left(\frac{A}{2} \cdot \frac{A}{2} + 1 \ldots\ldots A - 1\right)$, wodurch alle α und somit alle möglichen y umfasst werden, die zu einem bestimmten x gehören. Unter diesen sind also immer je zwei gleich, dem Zeichen nach entgegengesetzt, woraus folgt:

5. Ist A gerade, so sind die Curven, was auch Δ sei, symmetrisch in Bezug auf die Axe der x, und ebenso in Bezug auf Oy wenn B gerade ist, und da A und B nicht zu gleicher Zeit gerade sein können, so wird mit Ausnahme einiger gleich zu besprechender Fälle, nur eine Axe der Symmetrie vorkommen.

Macht man die Summe zweier aus R und R' genommenen y, so ist:

$$y + y' = 2b \sin\left\{\frac{2\pi\omega}{A} + (2\alpha + \alpha' \pm 1)\frac{B}{A} \cdot \frac{\pi}{2}\right\} \cos\left\{\frac{B}{A}\xi \pm \frac{B}{A}\frac{\pi}{2} + (\alpha - \alpha')\frac{B}{A}\pi\right\}$$

Dieser Ausdruck kann nicht mehr unabhängig von ω für jedes x Null werden, um aber die Abhängigkeit von ω zu finden, diene folgende Bemerkung.

Es muss zunächst $4\,\omega + (2\alpha + 2\alpha' \pm 1)\,B$ ein gerades Vielfache von A sein $= gA$, dieses erfordert vor Allem dass $\omega = o$ oder $\omega = \frac{1}{2}$ für gerade B, $\omega = \frac{1}{4}$ oder $\omega = \frac{3}{4}$ für ungerade B sei. Dann folgt weiter:

$$2\alpha + 2\alpha' \pm 1 = \frac{gA - 4\omega}{B}$$

der rechte Theil muss ungerade sein, weil es der linke ist, dieses ist aber immer für die zusammengehörend angeführten ω und B möglich. Aus

$$\frac{gA - 4\omega}{B} = u \text{ folgt } g = \frac{Bu + 4\omega}{A}$$

welcher Gleichung immer durch einen Werth von $2u$ genügt werden kann der kleiner als A ist. Man hat daher:

$$\alpha' = \frac{u \mp 1}{2} - \alpha$$

Von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \frac{u \mp 1}{2}$ gibt diese Gleichung die α' von $\alpha' = 0$ bis $\alpha' = \frac{u \mp 1}{2}$.

Da aber der Gleichung für g auch genügt wird, wenn man an die Stelle von u, $u + 2A$ setzt, so ist auch:

$$\alpha' = \frac{u \mp 1}{2} + A - \alpha,$$

und diese Gleichung gibt für die α von $\alpha = \frac{u \mp 1}{2} + 1$ bis $\alpha = A - 1$, auch die α' innerhalb dieser Grenzen. Es ist somit erwiesen, dass der Gleichung für $2\alpha + 2\alpha' \pm 1$ immer genügt werden kann, wobei man zugleich alle α und α', oder was dasselbe sagen will, alle aus R und R' gezogenen y berücksichtigt. Eine ähnliche Betrachtung für x durchgeführt, ergibt, indem man nur das von B gesagte auf A zu beziehen braucht, folgenden Satz:

6. Die in 5) angedeutete Ausnahme bezieht sich darauf, dass die Curven auch für ungerade A symmetrisch in Bezug auf Ox, und ebenso für ungerade B symmetrisch in Bezug auf Oy werden können, und zwar: ist Ox eine Axe der Symmetrie, und A ungerade, für gerade B und $\omega = 0$, $\omega = \frac{1}{2}$

für ungerade B und $\omega = \frac{1}{4}$, $\omega = \frac{3}{4}$

und Oy eine Axe der Symmetrie, bei ungeraden B, für gerade A, und $\omega = 0$, $\omega = \frac{1}{2}$

für ungerade A, und $\omega = \frac{1}{4}$, $\omega = \frac{3}{4}$.

Untersucht man den allgemeinen Ausdruck für die Differenz zweier nicht zu denselben x gehörigen y, und die Bedingung wann sie Null wird, so kömmt man zu neuen Eigenschaften, wenn man zwei aus R und R' genommene y vergleicht.

Diese Differenz ist:

$$y - y' = 2b \cos \left\{ (\xi - \xi') \frac{B}{2A} + \frac{\pi(\omega + \omega')}{A} + (2\alpha + 2\alpha' \pm 1) \frac{B}{A} \frac{\pi}{2} \right\} \times$$
$$\times \sin \left\{ (\xi + \xi') \frac{B}{2A} + \frac{\pi(\omega - \omega')}{A} + (2\alpha - 2\alpha' \pm 1) \frac{B}{A} \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$$

und sie wird, den zweiten Factor berücksichtigt, nur dann unabhängig von x Null, wenn man in den beiden zu ω und ω' gehörigen Curven $\xi = -\xi'$ nimmt. Der Ausdruck unter dem Zeichen sin. muss dann ein ganzes Vielfaches von π werden, was möglich wird, wenn $\omega - \omega' = -\frac{1}{2}$ ist, weil dann $-1 + (2\alpha - 2\alpha' + 1) B$ ein Vielfaches von $2A$ für B ungerade, oder $B = 2p + 1$ ergibt, oder die Relation:

$$\frac{1}{2}\Big(-1 + (2\alpha - 2\alpha' + 1) B\Big) = (\alpha - \alpha')(2p + 1) + p = kA$$

der immer durch $\alpha - \alpha' = n$, wo n kleiner als A, genügt werden kann. Es ist dann für $\alpha = n$, $\alpha' = 0$, für $\alpha = A - 1$, $\alpha' = A - n - 1$, es genügt aber auch $n - A$ der obigen Gleichung, und es wird für $\alpha = n - 1$, $\alpha' = A - 1$, $\alpha = 0$, $\alpha' = A - n$, so dass alle möglichen α und α' berücksichtigt sind. Was also in der zu ω gehörigen Curve auf der Seite der positiven x gelegen war, liegt in der zu $\omega + \frac{1}{2}$ gehörigen auf der Seite der negativen x, und umgekehrt. Macht man noch dieselbe Untersuchung mit den Ausdrücken für x, und berücksichtigt 5), so folgt:

7. Sind zwei Curven die zu denselben A und B gehören, in ihren ω um $\frac{1}{2}$ verschieden, so sind diese der Form nach identisch, der Lage nach aber verschieden, und zwar erhält man aus der zu ω gehörigen Curve, die zu $\omega + \frac{1}{2}$ gehörige, wenn man sich erstere um jene Coordinatenaxe gedreht denkt, die keine Axe der Symmetrie ist. Für ungerade A und B bleibt also diese Axe ganz willkürlich.

Setzt man jedoch $\xi = \xi'$, und betrachtet den ersten Theil in $y - y'$, so sieht man sogleich, dass die Differenz Null wird, wenn

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2(\omega + \omega') + (2\alpha + 2\alpha' \pm 1)B}{A}$$

ein ungerades Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ ist. Ein ungerades B macht den ganzen Zähler ungerade, wenn $\omega + \omega'$ nicht $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$ ist. Für gerade A müssen daher diese Werthe angenommen werden, damit der Quotient eine ungerade Zahl sein kann. Ist aber A ungerade, so muss der Zähler auch ungerade sein, was für gerade B wieder nur für $\omega + \omega' = \frac{1}{2}$ oder $\omega + \omega' = \frac{3}{2}$, für ungerade B aber nur für $\omega + \omega' = 1$ möglich ist. Berücksichtigt man noch das zu 6) erwähnte, dass nämlich die α immer diesen Bedingungen gemäss gewählt werden können, so folgt:

8. Für ungerade A und B sind die von $\omega = \frac{1}{2}$, für A oder B gerade aber die von $\omega = \frac{1}{4}$ oder $\omega = \frac{3}{4}$ im positiven und negativen Sinn zu gleich weit abstehenden ω gehörigen Curven der Gestalt und Lage nach identisch.

Die zu den eben genannten Phasendifferenzen gehörigen Curven sind aber auch durch ihre Gestalt von den übrigen ausgezeichnet. Denn setzt man $\xi = \xi'$ und $\omega = \omega'$ so wird:

$$y - y' = 2b \cos\left\{\frac{2\pi\omega}{A} + (2\alpha - 2\alpha' \pm 1)\frac{B}{A} \cdot \frac{\pi}{2}\right\} \sin\left\{\frac{B}{A}\xi + (2\alpha - 2\alpha' \mp 1)\frac{B}{A} \cdot \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Indem man bemerkt, dass der erste Factor identisch ist mit dem in 8) behandelten, kann man sogleich sagen:

9. Für ungerade A und B fallen für $\omega = 0$ und $\omega' = \frac{1}{2}$, für A oder B gerade aber für $\omega = \frac{1}{4}$ und $\omega' = \frac{3}{4}$ die aus R) und R') durch Verändern des x sich ergebenden Curvenäste übereinander, die Curven erhalten in Folge dessen eine einfachere Gestalt, und die Anzahl der Tangirungspunkte sollte jetzt halb so gross, also $\frac{A}{2}$ und $\frac{B}{2}$ werden.

Es ist aber wenigstens eine von den Zahlen A und B ungerade, daher müssen gewisse Äste so übereinander fallen, dass diese an die Seiten des Rechteckes kommen, ohne daselbst zu tangiren, oder es müssen Rückkehrpunkte auftreten. An diesen werden aber die Richtungen der Tangenten unbestimmt, daher muss für $x = \pm a$

$$\frac{dy}{dx} = b \cdot \cos\left\{\text{arc}\left(\sin = \frac{y}{b}\right)\right\}\frac{B}{A}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, oder $y = \pm b$ sein.

Um sich zu überzeugen, dass für die in 9) erwähnten ω wirklich diese Rückkehrpunkte vorkommen, nehme man die Gleichung für y, die jetzt sowohl für R als auch für R' identisch wird:

$$85)\qquad y = b \sin\left\{\frac{B}{A}\xi + \frac{2\pi\omega}{A} + \alpha\frac{B}{A}.2\pi\right\}$$

Darin braucht man wegen 7) nur einen von den zusammengehörigen Werthen von ω zu betrachten, da diese um $\frac{1}{2}$ von einander verschieden sind. Für $\xi = \pm\frac{\pi}{2}$ soll nun $y = \pm b$ werden. — Sind daher A und B ungerade, so muss, $x = + a$ vorausgesetzt.

$$\frac{(4\alpha + 1) B}{A}$$

eine ungerade Zahl werden. Dieser Bedingung kann aber immer genügt werden, denn setzt man zu gleicher Zeit:

$$\frac{A}{4} = k + \frac{p}{4}, \qquad \alpha = \frac{A^2 - 1}{4} - kA$$

wodurch α eine ganze Zahl wird, weil $A^2 - 1$ immer durch 4 theilbar ist, zugleich positiv und kleiner als A bleibt, so kommt:

$$\frac{(4\alpha + 1) B}{A} = pB = (1, 3,) B$$

da p nur 1 oder 3 sein kann.

Für $x = - a$ setze man:

$$\frac{A}{4} = k + \frac{p}{4}, \qquad \alpha = (k + 1) A - \frac{A^2-1}{4}$$

dann wird:

$$\frac{(4\alpha + 1) B}{A} = (4-p) B = (3, 1,) B$$

so dass die $x = a$ und $x = - a$ entsprechenden y immer entgegengesetzte Zeichen haben.

Ist aber B gerade, daher $\omega = 1$, so muss jetzt $x = + a$ vorausgesetzt,

$$\frac{1 + (4\alpha+1) B}{A}$$

eine ungerade Zahl werden. Man kann aber α immer aus der Gleichung bestimmen

$$(4\alpha - nA) B = A - B - 1$$

wo n eine gerade Zahl bedeutet, denn links und rechts vom Gleichheitszeichen stehen gerade Zahlen, und es ist dann

$$\frac{1 + (4\alpha+1) B}{A} = Bn + 1$$

für $x = -1$ braucht man nur zu setzen

$$\alpha - \alpha' = \frac{1 \pm A}{2} \quad . \quad \left\{4\alpha' - \left[n \pm 4\frac{B}{2}\right] A\right\} B = A - B - 1,$$

und hat dann

$$\frac{1 + (4\alpha'-1) B}{A} = Bn + 1 \pm 4\frac{B}{2}$$

woraus man sogleich sieht, dass, da diese ungerade Zahl sich von der vorhergehenden nur um ein Vielfaches von 4 unterscheidet, die zu $x = a$ und $x = -a$ gehörenden y dasselbe Zeichen behalten. Eine ähnliche Untersuchung müsste für die Gleichung der x gemacht werden, und man schliesst daher mit Rücksicht auf 7):

10. In den unter 9) betrachteten Fällen haben die Curven Rückkehrpunkte, und zwar zwei; diese liegen für A und B ungerade an den Endpunkten einer Diagonale des umschriebenen Rechteckes, so dass für jede der beiden oben angeführten Phasendifferenzen eine andere der beiden Diagonalen gehört. Ist aber eine der Zahlen A oder B gerade, so liegen diese Punkte an den Endpunkten derjenigen Rechteckseite, die auf der Axe der Symmetrie senkrecht steht, und es wechselt diese wieder für die beiden Phasendifferenzen. Will man aus diesen Curven auf A und B schliessen, so hat man die Rückkehrpunkte gleichsam als $\frac{1}{2}$ zur Zahl der an einer Seite vorkommenden Tangirungspunkte hinzuzugeben.

Fig. 4, Taf. I zeigt den allmählichen Übergang in einen der obigen Fälle für $A = 5$, $B = 6$, und die zu R und R' gehörigen Curvenäste sind in Bezug auf den Ausdruck für y, durch die punktirten und ausgezogenen Linien von einander unterschieden.

Der zweite Factor in der zu 9) gehörigen Gleichung führt ebenfalls zu bemerkenswerthen Eigenschaften, denn wird der Ausdruck unter dem Zeichen sin. ein Vielfaches von π, so wird $y - y'$ Null für die entsprechenden ξ, was auch ω sei, daher sich die Curvenäste unter einander schneiden, oder Vielfache Punkte haben müssen. Um zunächst $\frac{B}{A} . \frac{\pi}{2}$ wegfallen zu machen, setze man, ξ als Bruchtheil von π betrachtet.

$$\xi = \frac{\pi}{2} - \frac{m}{n}\pi$$

wodurch der zweite Factor wird

$$\sin\left\{-\frac{B}{A} . \frac{m}{n}\pi + (\alpha-\alpha')\frac{B}{A}\pi\right\}$$

Setzt man $\frac{B}{A} = p + \frac{p'}{A}$, so dass also

$$-\frac{B}{A} . \frac{m}{n}\pi + (\alpha-\alpha')\frac{p'}{A}$$

eine ganze Zahl sein muss, so genügt man dieser Bedingung, indem man $n = B$ setzt, wo dann $m < B$ bleiben muss, denn es ist immer möglich der Gleichung

$$\frac{-m + (\alpha - \alpha')p'}{A} = \pm k$$

durch einen positiven oder negativen Werth von $\alpha - \alpha'$ zu genügen, der kleiner als A ist, und k eine ganze Zahl bedeutet. Ist $\delta = \alpha - \alpha'$ so umfasst man zugleich alle möglichen α', wenn α alle möglichen Werthe annimmt, denn es genügt ja auch $-A + \delta$ der vorigen Gleichung.

Es ordnen sich also alle zu $\xi = -\frac{m}{B}\pi + \frac{\pi}{2}$ gehörigen y so, dass immer je zwei aus R und R' genommene übereinanderfallen, mithin gibt es für jedes ξ, A solcher Durchschnittspunkte.

Dieses sind jedoch noch nicht alle möglichen vielfachen Punkte, denn es würden auch die zu R und R' gehörigen Curvenäste sich untereinander und nicht blos gegenseitig schneiden. Allein Punkte, die der Gleichung für y zu Folge z. B. dem aus R genommenen Curvenaste angehören, gehören in den Gleichungen für x, zweien aus R und R' sich ergebenden an. In der That zwei in Bezug auf y nur zu R gehörende Curvenäste können sich nicht schneiden, wenn sie nicht wenigstens einmal die zu Ox parallelen Rechteckseiten tangirt haben. Da aber in den Tangirungspunkten die aus R und R' kommenden Curvenäste zusammentreffen, so ist obige Behauptung erwiesen und gleichgiltig, ob man zur Bestimmung der übrigen vielfachen Punkte die Differenzen der aus R und R' folgenden für jede Reihe besonders bildet, oder ob man in den Gleichungen für x, die Differenzen solcher aus R und R' genommenen untersucht. Für diese Differenzen $x - x'$ gelten aber dieselben Schlüsse, man hat nur A mit B zu verwechseln.

Berücksichtigt man also die Werthe: $\xi = \frac{\pi}{2} - \frac{m}{B}\pi$, $\eta = \frac{\pi}{2} - \frac{m'}{A}\pi$, und die zugehörigen y und x, so gelangt man zu folgender Construction.

11. Man beschreibe über zwei, zu OX und OY parallelen Rechteckseiten zwei Halbkreise und theile den mit dem Radius a in B, den mit b in A gleiche Theile (Fig. 4, Taf. I). Zieht man durch diese Theilungspunkte Parallele zu OY und OX, so liegen auf einer jeden der erstern A, auf einer jeden der letztern B vielfache Punkte. Alle vielfachen Punkte finden sich auf diesen Geraden vertheilt, bleiben auf denselben, wie sich auch ω ändern mag, so dass sie nur eine Verschiebung in den oben genannten Geraden erleiden und ihre Anzahl ist:

$$A(B-1) + B(A-1) = 2AB - (A+B)$$

Die unter 9) erwähnten Curven müssen auch weniger vielfache Punkte haben, und da hier jeder Curvenast zweien in der allgemeinen Form entspricht, so muss auch jedem vielfachen Punkte dieser Curven vier in den andern Curven vor den Übereinanderfallen je zweier Äste entsprechen. Es können aber wegen 11) diese Punkte nur in den Durchschnittspunkten der dort angegebenen Geraden liegen, deren es $(A-1)(B-1)$ gibt, und daher wegen 7) in jeder Curve nur $\frac{(A-1)(B-1)}{2}$ vorhanden sein, indem durch das Umlegen der Curve um die Axe, die keine Axe der Symmetrie ist, keiner von den vielfachen Punkten auf einen in der ersten Lage fallen kann.

Es mögen nur noch einige Bemerkungen bezüglich der Geschwindigkeit des Beweglichen in den einzelnen Punkten der Curven gemacht werden. Transformirt man die Ausdrücke für die Geschwindigkeitscomponenten in ähnlicher Weise wie dieses für y geschah, und macht man die Summe aus jeder der Reihen R und R' einzeln, so sieht man, dass diese unter denselben Bedingungen wie $y_1 + y_2$ verschwinden, daher:

12. Die in 5) angeführten Axen der Symmetrie, sind es auch in Bezug auf die Geschwindigkeitscomponenten, und diese sind für entgegengesetzt bezeichnete x und y ebenfalls von entgegengesetzter Richtung.

Nimmt man aber die Differenz aus R und R', so verschwindet diese zugleich mit $y + y'$ also

13. Für die übrigen Fälle, wo die Curven symmetrisch werden, behalten die Componenten für entgegengesetzt gelegene Coordinaten dieselbe Grösse und Richtung bei;

und

14. Diese Richtungen werden entgegengesetzt für die Fälle 9), so dass in der zweiten Hälfte der Schwingungsdauer die Curve in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird, die singulären Punkte sind daher Rückkehrpunkte der Bewegung, und in ihnen die Geschwindigkeit Null.

Ferner hat man

$$\left(\frac{T_x}{2\pi}\right)^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2 = a^2 \qquad \left(\frac{T_y}{2\pi}\right)^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y^2 = b^2$$

woraus folgt, indem man die Geschwindigkeit in der Richtung der Tangente mit V bezeichnet

$$V = \pm \frac{2\pi}{T}\sqrt{\left\{A^2\,(a^2-x^2) + B^2\,(b^2-y^2)\right\}}.$$

15. Abgesehen vom Zeichen gehört zu denselben x und y auch eine gleiche Geschwindigkeit, sie ist ein Maximum für $x = 0$ und $y = 0$, wird aber Null für $x = \pm\, a$ und $y = \pm\, b$, in den Fällen, wo diese Werthe zu gleicher Zeit möglich sind.

Setzt man:

$$\alpha^2 = \frac{\left(\frac{2\pi}{TV}\right)^2 (A^2a^2 + B^2b^2) - 1}{A^2\left(\frac{2\pi}{TV}\right)^2} \qquad \beta^2 = \frac{\left(\frac{2\pi}{TV}\right)^2 (A^2a^2 + B^2b^2) - 1}{B^2\left(\frac{2\pi}{TV}\right)^2}$$

daher:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{B}{A}$$

so folgt:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

16. Beschreibt man um den Ursprung der Coordinaten als Mittelpunkt ein System ähnlicher Ellipsen, so dass $\alpha:\beta = B:A$ wird, so sind die Durchschnittspunkte mit den Interferenzcurven, die zu einer Ellipse gehören,

solche, wo das Bewegliche, abgesehen vom Zeichen, dieselbe Geschwindigkeit hat, was auch ω sein mag.

Die Taf. II enthält einige einfachere Fälle der Interferenzcurven, um $\frac{1}{8}$ fortschreitend, und nur von $\omega = 0$ bis $\omega = \frac{1}{4}$ ausgeführt, da man nach den aufgestellten Eigenschaften sehr leicht auf die zu den übrigen Phasendifferenzen gehörigen Formen schliessen kann.

Bei der Darstellung der Curven auf die eine oder andere der oben angeführten Art und Weise, hat man in gewissen Fällen einen eigenthümlichen Anblick. Oft scheint es nämlich, als ob eine bestimmte Interferenzcurve nach und nach alle möglichen Formen, die bei gegebenen A und B der Reihe nach auftreten, oder was dasselbe ist, dass alle ω von $\omega = 0$ bis $\omega = 1$ continuirlich durchlaufen würden. Diese Erscheinung zugleich mit dem Auftreten der Combinationsstösse, wurde schon von Lissajous bei seinen Versuchen bemerkt, und sie tritt immer ein, wenn die beiden interferirenden Schwingungen so beschaffen sind, dass ihr Verhältniss der Schwingungsdauern dem zu dem oscillirenden Curvensystem gehörigen schon sehr nahe kömmt, und je näher, desto langsamer sieht man das Oscilliren vor sich gehen. Diese Erscheinung hat ihren Grund darin, dass das Auge nur im Stande ist auf eine gewisse, sehr kleine Zeit τ einen vorübergehenden Lichteindruck zu behalten. Ist nun T grösser als τ, so kann das Auge nicht den Eindruck der ganzen Curve behalten, sondern nur den Theil derselben, der in der Zeit τ zurückgelegt wird. Ist nun die Curve sehr complicirt, also T sehr gross, so werden die unmittelbar auf einander folgenden Curvenäste einander so nahe kommen, dass das Auge sie nicht mehr zu unterscheiden vermag, und daher eine Partie der ganzen Curve als geschlossen erblickt. Die übrigen Erscheinungen erklären sich aus folgender Betrachtung:

Setzt man in der Gleichung der Interferenzcurve

$$2\pi\omega = A \,.\, \text{arc}\left(\sin = \frac{y}{b}\right) - B\, \text{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right)$$

$A = \mathfrak{A} + \alpha$, $B = \mathfrak{B} + \beta$ so erhält man, die Gleichung 82) berücksichtigend

$$88)\qquad 2\pi\left\{\omega\left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) + \frac{t}{m}\left(\frac{\beta}{B} - \frac{\alpha}{A}\right)\right\} = \mathfrak{A} \,.\, \text{arc}\left(\sin = \frac{y}{b}\right) - \mathfrak{B} \,.\, \text{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right)$$

17. Man kann demnach jede Interferenzcurve ansehen als entstanden aus einer andern, bei welcher die Phasendifferenz eine Function der Zeit ist.

Hat sich die Zeit von einem beliebigen Augenblick an um

$$\theta = \pm \frac{mAB}{A\beta - B\alpha}$$

geändert, so kehren dieselben Curven wieder, da die Differenz der ω die Einheit wird. Diese Zeit wird um so kleiner, je kleiner α und β werden, was immer bei den oben angedeuteten Fällen eintritt, und man sieht ein, wie es möglich wird, die zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gehörige Curve in allen ihren aufeinander folgenden Phasendifferenzen zu sehen, statt der durch A und B bestimmten bei der Phasendifferenz ω.

Die Bemerkung 17) führt unmittelbar zu einer Eigenthümlichkeit der betrachteten Curven, indem man speciell als erzeugendes Curvensystem das zur Gleichheit von A und B gehörige nimmt. Setzt man also

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = 1$$

so erhält man aus 88) durch eine leichte Transformation, indem $\alpha = A - 1$, $\beta = B - 1$

$$89) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{xy}{ab} 2 \cos 2\pi \left[\frac{A}{\omega} + \frac{t}{m}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\right] = \sin^2 2\pi \left[\frac{\omega}{A} + \frac{t}{m}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\right]$$

die Gleichung einer Ellipse.

Allein die Neigung der grossen Axe und die Grösse der beiden Halbaxen sind Functionen der Zeit. Die Ellipsen durchlaufen alle Gestalten, die sie durch Verändern der Phasendifferenz in der zu $A = B = 1$ gehörigen Interferenzcurve annehmen würden, gehen also von der geneigten Geraden allmählich in eine Ellipse, von dieser in diejenige, deren grosse Axe senkrecht auf Ox steht, sodann in die entgegengesetzt geneigte Ellipse und Gerade über u. s. f.; den jedesmaligen Neigungswinkel der grossen Axe findet man aus der Gleichung

$$90) \qquad \operatorname{tng} 2\varphi = \frac{2ab \cos 2\pi \left[\frac{\omega}{A} + \frac{t}{m}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\right]}{a^2 - b^2}$$

und die Zeit in welcher alle Phasendifferenzen durchlaufen sein müssen, damit der in der veränderlichen Ellipse sich bewegende Punkt die zu A, B gehörige Interferenzcurve beschreibt, ist

$$\theta = \pm \frac{mAB}{B - A}$$

und wenn man die Schwingungsdauer einführt

$$\theta = \pm \frac{T}{B - A}$$

wo das doppelte Zeichen θ immer positiv zu nehmen erlaubt.

Es möge nun gestattet sein einige Zahlenwerthe, wie sie die bis zu diesem Augenblick ausgeführten Versuche ergeben, vorzuführen. Sie beziehen sich auf die in Art. II zuerst beschriebene Methode, wo constante Längen angewendet werden. An den Stab, dessen Schwingungsdauer verändert werden sollte, wurde nicht ein Schirm mit einer Spalte, sondern ein hellpolirter feiner Drath in der Richtung derselben, der eine feine Lichtlinie erzeugte, angebracht, um auf diese Belastung die in *b)* zuerst angeführte Methode anwenden zu können. Die Längen wurden so lange regulirt, bis als Interferenzcurven die Ellipsen erschienen, somit die Schwingungsdauer an beiden Stäben gleich war. Nun wurde der den Drath tragende Stab belastet, durch ein Gewicht, welches mittelst zweier Gegenschrauben angedrückt (Fig. 2, Taf. I) eine möglichst kleine Berührungsfläche erforderte, und dieses Gewicht so lange verschoben, bis die zu $A = 3$, $B = 2$ gehörigen, und sodann die zu $A = 4$ und $B = 3$ gehörigen Interferenzcurven sich zeigten; wobei natürlich der zweite Stab unverändert blieb; sodann wurden durch ein grösseres Gewicht wieder die Curven (3, 2) erhalten. Auf diese Weise war das Verhältniss der Schwingungsdauer des belasteten und unbelasteten Stabes

bekannt. Die Länge l des Stabes musste noch wegen des am Ende befindlichen Drathes nach Gleichung 68) corrigirt werden, und man erhielt sodann folgende Daten:

		$M = 12\cdot807$ grmm.		$l = 325\cdot8$ mm
1)	(3,2)	$\mathfrak{M} = 6\cdot960$	„	$a = 271\cdot0$
2)	(4,3)	$\mathfrak{M} = 6\cdot960$	„	$a = 230\cdot7$
3)	(3,2)	$\mathfrak{M} = 13\cdot585$	„	$a = 213\cdot7$

Nach der unter *a)* gegebenen ersten Näherungsformel wurden mit diesen Werthen die ξ berechnet und erhalten

$$\xi_1 = 0\cdot04432, \quad \xi_2 = -0\cdot05254, \quad \xi_3 = 0\cdot03291$$

daraus $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ berechnet und quadrirt, gibt als berechnetes Verhältniss der Schwingungsdauern

1) 1·5018 2) 1·3280 3) 1·4796

während

1·5000 1·3333 1·5000

nach der Beobachtung sein soll. Diese erste Näherung ist also im ungünstigsten Falle bis auf 0·02 genau, wo doch im dritten Fall $\mathfrak{M}$ eine bedeutende Grösse hat. Man muss aber bedenken, dass, da hier die ξ sehr klein sind, der angewandte Näherungswerth für diese Fälle sehr günstig war.

Eine zweite Versuchsreihe wurde mit einem am Ende belasteten Stab gemacht, und die Schwingungsdauer durch verschiedene Gewichte verändert.

Es war hier:

	$M = 1\cdot9685$ grmm.	$l = 122\cdot1$ mm
(1,1)	$\mathfrak{M} = 1\cdot901$	„
(4,3)	$\mathfrak{M} = 3\cdot657$	„
(3,2)	$\mathfrak{M} = 4\cdot735$	„
(2,1)	$\mathfrak{M} = 8\cdot623$	„

Die angehängten Gewichte waren von cylindrischer Form, in der Axe durchbohrt, so dass ein Befestigen im Schwerpunkt möglich war.

Geht man mit diesen Zahlen in die unter *b)* gegebene erste Näherungsformel, wo noch im rechten Theil $\xi = 0$ gesetzt ist, so findet man

		1. Theil	2. Theil
1)	(1, 1)	0·63460	0·16728
2)	(4, 3)	0·79411	0·10881
3)	(3, 2)	0·84654	0·08959
4)	(2, 1)	0·94169	0·05472

und daher weiter

$$\xi_1 = 0\cdot43716, \ \xi_2 = 0\cdot60079, \ \xi_3 = 0\cdot64796, \ \xi_4 = 0\cdot72557.$$

Damit erhält man

$$\sigma_1 = 1\cdot13363, \ \sigma_2 = 0\cdot97000, \ \sigma_3 = 0\cdot92283, \ \sigma_4 = 0\cdot84522.$$

Bildet man jetzt die Quotienten $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$, $\frac{\sigma_1}{\sigma_4}$ und quadrirt, so bekommt man als Verhältniss der Schwingungsdauer des mit $\mathfrak{M}_1$ zu den mit $\mathfrak{M}_2$ $\mathfrak{M}_3$ $\mathfrak{M}_4$ belasteten Stabes

$$1\cdot3658, \quad 1\cdot5090, \quad 1\cdot7983,$$

während sein soll

$$1\cdot3333, \quad 1\cdot5000, \quad 2\cdot0000.$$

Dieses zeigt aber zur Genüge, dass die ξ schon sehr nahe richtig sind, und in der That erhielte man jetzt aus den genauen Formeln genug übereinstimmende Resultate.

Die zweite Methode konnte aus Mangel eines genau ausgeführten Apparates noch keine zu Messungen nothwendigen Daten liefern, allein die Darstellung der Interferenzcurven gelang vollkommen mit einer ganz rohen Zusammenstellung.

Dass über die Knoten Gesagte kann ebenfalls sehr leicht bestätiget werden, indem man dieselben auf gewöhnliche Weise durch Papierringe sichtbar macht. Es zeigte sich unzweifelhaft das Hinausrücken der Knoten gegen das freie Ende beim Anhängen eines nicht zu grossen Gewichtes, das Verschwinden eines Knotenpunktes, und endlich auch die Bewegung gegen das fixe Ende, sobald das angehängte Gewicht und seine Entfernung a von demselben nicht gross war.
